Y. Pérelman

L'algèbre récréative

SCIENCE POUR TOUS
EDITIONS DE MOSCOU



Y. Pérelman

L'ALGÈBRE RÉCRÉATIVE

DEUXIÈME ÉDITION

ÉDITIONS MIR • MOSCOU 1967

UDC 512 (023) = 40

Traduit du russe
par CH. BIR

Extrait de la préface de l'auteur à la troisième édition

Il ne faut pas considérer ce livre comme un manuel d' « algèbre facile » pour débutants. Comme mes autres ouvrages de la même collection, *L'algèbre récréative* n'est pas un livre d'études, mais un livre à lire pour se distraire. Le lecteur auquel il est destiné doit avoir certaines connaissances d'algèbre, même si elles sont vagues ou à moitié oubliées. *L'algèbre récréative* a pour but de rendre plus précises, de rafraîchir et d'approfondir ces connaissances éparses et peu solides, mais surtout de former chez le lecteur le goût pour l'étude de l'algèbre et le désir de combler lui-même, à l'aide des livres appropriés, ses lacunes éventuelles. Sous ce rapport, *L'algèbre récréative* n'a pas le même but qu'un livre comme *Les nombres et les figures* de Rademacher et Toeplitz, par exemple, qui ne demande pas au lecteur de « se rappeler les mathématiques que nous avons étudiées dans notre jeunesse ». Mon livre, au contraire, cherche à consolider les connaissances acquises à l'école.

Pour donner plus d'attrait et d'intérêt au sujet, j'ai utilisé différents moyens ; on trouvera

ici des problèmes peu courants ou curieux, des incursions dans l'histoire des mathématiques, des applications inattendues de l'algèbre dans la vie pratique, etc.

Par les matières étudiées, ce livre ne dépasse pas le programme d'algèbre de l'enseignement secondaire, abordant presque toutes les parties de celui-ci, mais évitant les questions théoriques difficiles.

CHAPITRE PREMIER

LA CINQUIÈME OPÉRATION MATHÉMATIQUE

Qu'est-ce que la cinquième opération ?

On appelle souvent l'algèbre « l'arithmétique à sept opérations », voulant souligner ainsi qu'aux quatre opérations mathématiques bien connues elle en ajoute trois nouvelles : l'élévation à une puissance et deux opérations inverses.

Nous commencerons nos entretiens sur l'algèbre par la « cinquième opération » : l'élévation à une puissance.

A-t-on besoin de cette nouvelle opération dans la vie courante ? Sans aucun doute, et très souvent. Rappelons-nous les nombreux cas de calcul des surfaces et des volumes, où habituellement on est obligé d'élever des nombres à la deuxième et à la troisième puissances. De plus, la force de gravitation universelle, des interactions électrostatique et magnétique, la lumière et le son diminuent proportionnellement au carré de la distance. La durée de la révolution des planètes autour du Soleil (et des satellites autour des planètes) est liée aux distances du centre de l'orbite par une loi où figurent les puissances : les carrés des durées de révolution sont entre eux comme les troisièmes puissances des distances.

Il ne faut pas croire qu'en pratique nous n'avons affaire qu'aux carrés et aux cubes, et que les exposants supérieurs ne se trouvent que dans les recueils de problèmes d'algèbre. En

calculant la résistance d'une pièce ou d'un ouvrage, l'ingénieur a souvent besoin de la quatrième puissance, et même pour certains calculs, diamètre d'une conduite de vapeur, par exemple, de la sixième. En étudiant la force avec laquelle un fleuve charrie des pierres, l'hydrotechnicien opère également avec la sixième puissance : si la vitesse du courant d'un fleuve est quatre fois supérieure à celle d'un autre fleuve, le plus rapide d'eux est capable de charrier des pierres $4^6 = 4096$ fois plus lourdes que l'autre *.

Nous trouvons des puissances encore plus grandes en étudiant le rapport qui existe entre la brillance d'un corps incandescent, par exemple le filament d'une ampoule électrique, et la température. La brillance totale d'un corps chauffé à blanc croît avec la douzième puissance de la température et celle d'un corps chauffé au rouge avec la trentième puissance de la température (il s'agit de la température absolue, comptée à partir de —273°). Cela veut dire qu'un corps dont la température a été portée, par exemple, de 2000 à 4000 degrés (absolus), c'est-à-dire doublée, devient 2^{12}, soit plus de 4000 fois plus brillant. Nous indiquerons par la suite l'importance que ce rapport particulier a dans la fabrication des ampoules électriques.

Chiffres astronomiques

On peut dire que ce sont les astronomes qui emploient le plus la cinquième opération mathématique. A chaque pas ils ont affaire à des nombres énormes, comprenant chacun un ou deux

* Voir à ce sujet mon livre *La mécanique récréative*.

chiffres significatifs et une longue série de zéros. La représentation de tels géants numériques, appelés à juste titre nombres astronomiques, de la façon habituelle conduirait inévitablement à de grands inconvénients, surtout dans les calculs. Par exemple, la distance jusqu'à la nébulosité d'Andromède, exprimée en kilomètres de la manière ordinaire, s'écrira :

9 500 000 000 000 000 000.

Quand on fait des calculs astronomiques, on est parfois obligé d'exprimer les distances célestes non en kilomètres ou en unités plus grandes, mais en centimètres. La distance dont nous venons de parler sera dans ce cas représentée par un nombre ayant 5 zéros de plus :

950 000 000 000 000 000 000 000.

La masse des étoiles est représentée par des nombres encore plus grands, surtout si on l'exprime en grammes, ce qui est nécessaire pour de nombreux calculs. La masse du Soleil en grammes est égale à

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

On imagine aisément combien il serait fatiguant de faire des calculs avec des nombres aussi encombrants, et combien il serait facile de s'y tromper. Et les nombres que nous avons cités ne sont pas les plus grands.

La cinquième opération mathématique permet de vaincre facilement cette difficulté. Le chiffre 1 accompagné d'une série de zéros ne représente rien d'autre qu'une certaine puissance de dix :

$100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$, etc.

Les nombres géants indiqués plus haut peuvent être représentés de la façon suivante :

le premier . . . . $950 \cdot 10^{21}$,
le second . . . . $1983 \cdot 10^{30}$.

Ce qui non seulement économise la place, mais facilite les calculs. Si on a par exemple à multiplier ces deux nombres, il suffit d'effectuer leur produit $950 \cdot 1983 = 1\,883\,850$, puis de le multiplier par $10^{21+30} = 10^{51}$:

$$950 \cdot 10^{21} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{52}.$$

Cela est évidemment beaucoup plus commode que d'écrire d'abord un nombre comportant 21 zéros, puis un autre comportant 30 zéros, et un troisième en comportant 52. En outre, cela évite les erreurs que l'on commettrait fatalement si on avait des dizaines de zéros à écrire.

Combien pèse l'air entier ?

Pour nous rendre compte combien on peut faciliter les calculs en représentant les grands nombres à l'aide du nombre 10 élevé à une certaine puissance, faisons le calcul suivant : cherchons combien de fois la masse du globe terrestre est plus grande que celle de l'air qui l'entoure.

Nous savons que l'air exerce sur chaque centimètre carré de la surface terrestre une pression égale environ à 1 kilogramme. Cela signifie que le poids d'une colonne d'atmosphère qui s'appuie sur un centimètre carré est égal à 1 kilogramme. Il y a évidemment autant de colonnes semblables que la surface de notre planète compte de centimètres carrés, et l'atmosphère pèse autant de kilogrammes. N'importe que l'aide-mémoire indique que la surface du globe

terrestre est de 510 millions de kilomètres carrés, soit $51 \cdot 10^7$ kilomètres carrés.

Calculons combien de centimètres carrés il y a dans un kilomètre carré. Un kilomètre linéaire contient 1000 m de 100 cm chacun, c'est-à-dire 10^5 cm. Le kilomètre carré contient alors $(10^5)^2 = 10^{10}$ cm². La surface du globe terrestre contient donc

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2.$$

L'atmosphère entourant la Terre pèse autant de kilogrammes. Nous aurons donc en tonnes :

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

La masse du globe terrestre est égale à $6 \cdot 10^{21}$ tonnes.

Pour déterminer de combien de fois notre planète est plus lourde que son enveloppe aérienne nous faisons la division suivante :

$$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

c'est-à-dire que la masse de l'atmosphère est égale environ à un millionième de la masse du globe terrestre.

Combustion « sans flamme et sans chaleur »

Si vous demandez à un chimiste pourquoi le bois ou le charbon ne brûlent qu'à une haute température, il vous répondra que la combinaison du carbone avec l'oxygène a lieu, à vrai dire, sous toutes les températures, mais qu'aux basses températures ce processus est très lent (c'est-à-dire qu'un nombre très faible de molécules prennent part à la réaction), et que pour cela, il échappe à nos observations. La loi

qui définit la vitesse des réactions chimiques affirme que pour un abaissement de température de 10°, la vitesse de la réaction (le nombre de molécules qui y participent) diminue de deux fois.

Admettons qu'à une température de la flamme égale à 600°, il brûle un gramme de bois par seconde. En combien de temps brûlera un gramme de bois à la température de 20° ? L'abaissement de température étant de $580 = 58 \cdot 10$ degrés, la vitesse de la réaction est 2^{58} fois plus petite. Par conséquent, un gramme de bois brûlera en 2^{58} secondes.

Combien d'années cela représente-t-il ? Nous pouvons le calculer approximativement, sans répéter 57 fois la multiplication de 2 par lui-même, et sans utiliser une table de logarithmes. Profitons de ce que

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

Par suite,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

soit environ un quart de quintillion de secondes.

L'année contenant environ 30 millions de secondes, soit $3 \cdot 10^7$, on aura :

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10} \text{ années.}$$

Dix milliards d'années ! Voilà le temps que met un gramme de bois à brûler « sans flamme et sans chaleur ».

Ainsi le bois et le charbon brûlent à la température ordinaire, sans être allumés. Mais la découverte du feu a accéléré des milliards de fois ce processus terriblement lent.

La diversité du temps

Problème

Caractérisons le temps à l'aide d'un seul indice : le ciel est-il couvert ou non ? Autrement dit, distinguons seulement les jours clairs et les jours nuageux. Peut-on dans ces conditions avoir beaucoup de semaines avec des alternances de temps différentes ?

A première vue, non : au bout d'un ou deux mois, toutes les combinaisons de jours clairs et de jours nuageux seront probablement épuisées, et une des combinaisons déjà observée se répétera inévitablement.

Essayons cependant de calculer le nombre de combinaisons possibles. Ce type de problèmes nous amène tout de suite à la cinquième opération mathématique.

Solution

Le premier jour de la semaine peut être clair ou nuageux ; nous avons donc pour le moment seulement deux « combinaisons ».

Pendant une période de deux jours les alternances suivantes de jours clairs et nuageux sont possibles :

jour clair et jour clair,
jour clair et jour nuageux,
jour nuageux et jour clair,
jour nuageux et jour nuageux.

Ainsi, pendant deux jours nous avons 22 alternances différentes. Pendant une période de trois jours, chacune des quatre combinaisons des deux premiers jours se joint à deux combinaisons

du troisième jour ; le nombre d'alternances sera

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

Au cours de quatre jours le nombre d'alternances sera

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

En cinq jours 2^5 alternances sont possibles, en 6 jours 2^6, et enfin en une semaine $2^7=128$ alternances différentes.

Il en résulte qu'il y a 128 semaines avec différents ordres d'alternances de jours clairs et nuageux. Après $128 \cdot 7=896$ jours une des combinaisons ayant déjà eu lieu se répétera inévitablement ; cette répétition peut évidemment se produire avant, mais 896 jours est le délai après lequel une telle répétition est inévitable. Inversement, plus de deux années entières (deux ans et 166 jours) peuvent s'écouler sans qu'une semaine ressemble à l'autre en ce qui concerne le temps.

La serrure à secret

Problème

Dans un service soviétique, on a découvert un coffre-fort qui était là depuis le temps des tsars. On a même trouvé la clé, mais pour s'en servir, il fallait connaître le secret de la serrure ; la porte du coffre-fort ne s'ouvrait que lorsque les 5 cercles situés sur la porte, avec l'alphabet russe disposé sur le pourtour de chacun d'eux (36 lettres), étaient réglés pour former un mot déterminé. Personne ne connaissant ce mot, on a décidé, pour ne pas être obligé de forcer le coffre-fort, d'essayer toutes les combinaisons

de lettres de ces cercles. Trois secondes suffisent pour former une combinaison.

Peut-on espérer que le coffre-fort sera ouvert au bout de 10 jours ?

Solution

Calculons combien de combinaisons de lettres il a fallu essayer.

Chacune des 36 lettres du premier cercle peut se combiner avec chacune des 36 lettres du deuxième cercle. Le nombre de combinaisons possibles sera donc

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

A chacune de ces combinaisons on peut joindre l'une quelconque des 36 lettres du 3e cercle. Le nombre de combinaisons à trois lettres est :

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

De la même façon nous trouvons qu'il peut y avoir 36^4 combinaisons à quatre lettres et 36^5 ou 60 466 176 combinaisons à cinq lettres. Pour former ces combinaisons, dont le nombre dépasse 60 millions, on aurait besoin, à raison de 3 secondes par combinaison, de

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

secondes. Cela fait plus de 50 000 heures ou presque 6 300 jours de 8 heures soit plus de 20 ans.

Autrement dit, il y a seulement 10 chances sur 6300 ou 1 sur 630 pour que le coffre-fort soit ouvert au cours des 10 prochains jours. C'est une probabilité bien petite.

Un cycliste superstitieux

Problème

Une personne a acheté une bicyclette avec l'intention d'apprendre à s'en servir. Mais cet homme est extrêmement superstitieux. Ayant appris qu'il existe un accident fréquent appelé « roues en 8 », il décide que s'il reçoit une plaque minéralogique dont le numéro contient même un seul chiffre 8, cela lui portera malheur. Cependant, en allant chercher cette plaque, il se console lui-même avec le raisonnement suivant : dans la présentation de chaque nombre peuvent figurer 10 chiffres : 0,1, ..., 9. Parmi ces chiffres, seul le 8 porte malheur. C'est pourquoi il y a seulement une chance sur dix pour que le numéro de la plaque soit « néfaste ».

Ce raisonnement est-il juste ?

Solution

Les numéros des plaques de bicyclette sont à 6 chiffres. Il y a en tout 999 999 numéros : de 000 001 jusqu'à 999 999. Calculons combien il y a de numéros « heureux ». La première place peut être occupée par un chiffre quelconque parmi les 9 chiffres heureux : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. La deuxième place peut également être occupée par l'un quelconque de ces chiffres. Il existe donc $9 \cdot 9 = 9^2$ combinaisons heureuses à deux chiffres. A chacune de ces combinaisons on peut ajouter un 3e chiffre quelconque parmi les 9 chiffres indiqués, de sorte que le nombre de combinaisons « heureuses » à trois chiffres sera $9^2 \cdot 9 = 9^3$.

On trouve de la même façon que le nombre de combinaisons « heureuses » à 6 chiffres est égal

à 9^6. Mais ce dernier nombre comprend également la combinaison 000 000, qui ne convient pas comme numéro d'une bicyclette. Le nombre de numéros « heureux » est donc égal à $9^6-1=$ $=531\,440$, soit un peu plus que 53% de tous les numéros, et non 90% comme le supposait le propriétaire de la bicyclette.

Laissons au lecteur le soin de se convaincre que parmi les numéros à 7 chiffres il y a beaucoup plus de numéros « malheureux » que de numéros « heureux ».

Résultats de doublements répétés

La légende bien connue de la prime demandée par l'inventeur du jeu d'échecs est un exemple frappant de l'accroissement extrêmement rapide d'une toute petite valeur lorsqu'on la double de façon répétée *. Sans nous attarder à cet exemple, devenu classique, nous en citerons quelques autres moins connus.

Problème

Il existe un infusoire appelé paramécie qui se divise en deux toutes les 27 heures en moyenne. Si tous les infusoires naissaient viables, combien faudrait-il de temps pour que la descendance d'une paramécie occupe un volume égal à celui du Soleil ?

Données pour le calcul : la quarantième descendance des paramécies qui ne meurent pas après la division occupe un volume de 1 m^3 ; on prendra le volume du Soleil égal à 10^{27} m^3.

* Voir mon livre *Les mathématiques vivantes.*

Solution

Le problème consiste donc à déterminer combien de fois il faut doubler un m^3 pour obtenir un volume de 10^{27} m^3. Faisons les transformations nécessaires :

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}, \quad \text{car} \quad 2^{10} \approx 1000.$$

Donc, la quarantième descendance doit subir encore 90 divisions pour atteindre le volume du Soleil. Le nombre total de générations sera $40+90=130$. Il est facile à calculer que cela arrivera le 147e jour.

Notons qu'un microbiologiste, Métalnikov, a effectivement observé 8061 divisions de paramécies. Laissons au lecteur le soin de calculer quel serait l'énorme volume de la dernière génération si tous les infusoires restaient en vie...

La question posée dans ce problème peut être envisagée pour ainsi dire à l'envers. Imaginons que le Soleil a été divisé en deux, puisque chaque moitié a été également divisée en deux, etc. Combien de divisions semblables faut-il opérer pour obtenir des particules de la taille d'un infusoire ? Bien que la réponse soit déjà connue au lecteur (130), elle frappe par sa valeur modeste.

On m'a proposé une fois un problème analogue sous la forme suivante :

Une feuille de papier a été déchirée en deux, une des moitiés a été de nouveau déchirée en deux, etc. Combien de fois faudra-t-il déchirer le papier en deux pour obtenir des particules ayant les dimensions d'un atome ?

Admettons qu'une feuille de papier pèse un gramme et acceptons pour le poids de l'atome une grandeur de l'ordre de $\frac{1}{10^{24}}$ g. Etant donné

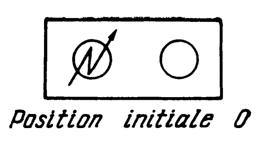
qu'on peut remplacer approximativement 10^{24} par 2^{80}, il est clair qu'il faudra faire seulement 80 divisions, et non pas des millions, comme on le répond parfois quand on pose ce problème.

100 mille fois plus vite

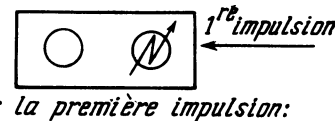
Un appareil appelé basculeur comprend deux lampes électroniques. Le courant dans le basculeur ne peut passer que par une seule lampe, par celle de gauche ou par celle de droite. Le basculeur a deux contacts auxquels on peut appliquer un signal électrique de courte durée (une impulsion) et deux contacts par lesquels une impulsion réponse vient du basculeur. A l'instant précis où une impulsion électrique extérieure arrive, la lampe par laquelle passait le courant est bloquée et le courant commence à traverser l'autre lampe. L'impulsion réponse est envoyée par le basculeur à l'instant où la lampe de droite est bloquée et où celle de gauche débloquée.

Voyons maintenant comment va fonctionner le basculeur lorsqu'on lui applique plusieurs impulsions électriques l'une après l'autre. Nous allons caractériser l'état du basculeur selon sa lampe de *droite* : si le courant *ne passe pas* par la lampe de droite nous dirons que le basculeur se trouve « dans la position 0 », et dans la « position 1 » lorsque le courant passe.

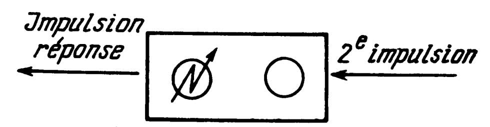
Admettons qu'au début, le basculeur se trouve dans la position 0, c'est-à-dire que le courant passe par la lampe de gauche (fig. 1). Après la première impulsion, le courant passera par la lampe de droite, et le basculeur se trouvera dans la position 1. Le basculeur n'enverra pas d'impulsion réponse, car le signal de réponse est en-



Position initiale 0



Après la première impulsion: position 1



Après la deuxième impulsion: position 0 envoi de l'impulsion réponse

Fig. 1

voyé au moment de blocage de la lampe de droite (et non de la lampe de gauche).

Après la deuxième impulsion, le courant passera par la lampe de gauche, et le basculeur se trouvera de nouveau dans la position 0. Mais maintenant il enverra un signal de réponse (une impulsion).

Après deux impulsions, le basculeur se retrouve donc dans la position initiale. Pour cette raison, après la troisième impulsion, il se trouvera de nouveau dans la position 1 (comme après la première impulsion), et après la quatrième impulsion (comme après la deuxième) il sera dans la position 0 avec envoi simultané d'un signal de réponse, etc. Toutes les deux impulsions, le basculeur se retrouve dans la même position.

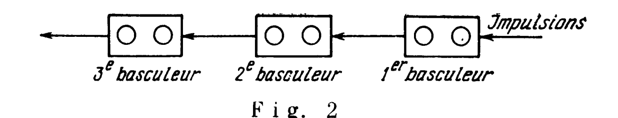


Fig. 2

Imaginons que nous avons plusieurs basculeurs, et que les impulsions extérieures sont appliquées au premier basculeur, que les impulsions réponse du premier basculeur sont appliquées au deuxième, les impulsions réponse du deuxième au troisième, etc. (sur la fig. 2, les basculeurs sont situés l'un après l'autre de droite à gauche). Nous allons suivre le fonctionnement de cette chaîne de basculeurs.

Admettons qu'au début tous les basculeurs se trouvent dans la position 0. Par exemple, pour une chaîne comprenant 5 basculeurs, nous avons la combinaison 00000. Après la première impulsion, le premier basculeur d'extrême droite se trouvera dans la position 1 ; comme il n'envoie pas alors d'impulsion réponse, tous les autres basculeurs restent dans la position 0, c'est-à-dire que la chaîne est caractérisée par la combinaison 00001. Après la deuxième impulsion, le premier basculeur est bloqué (position 0), mais il envoie alors une impulsion réponse qui débloquera le deuxième basculeur. Les autres basculeurs restent dans la position 0 ; on a donc la combinaison 00010. Après la troisième impulsion le premier basculeur sera mis en circuit et les autres resteront dans la même position. Nous aurons alors la combinaison 00011. Après la quatrième impulsion, le premier basculeur sera mis hors circuit, ayant envoyé un signal de réponse ; ce signal de réponse mettra hors circuit le deuxième basculeur qui aussi enverra une impulsion de réponse ;

cette dernière impulsion mettra en circuit le troisième basculeur. Nous obtenons ainsi la combinaison 00100.

On peut continuer ce raisonnement. Nous allons voir ce qu'on obtient alors :

1re	impulsion-	combinaison	00001
2^e	»	»	00010
3^e	»	»	00011
4^e	»	»	00100
5^e	»	»	00101
6^e	»	»	00110
7^e	»	»	00111
8^e	»	»	01000
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

Nous voyons que la chaîne du basculeur « compte » les signaux venus de l'extérieur et « enregistre » à sa manière le nombre de ces signaux. Il est facile à voir que « l'inscription » du nombre des impulsions reçues s'effectue non pas suivant le système décimal, mais suivant le système *binaire* de numération.

Dans le système binaire, tout nombre s'écrit à l'aide des chiffres 0 et 1. L'unité de l'ordre suivant est seulement deux fois plus grande que les unités de l'ordre précédent, et non pas 10 fois comme dans le système décimal ordinaire. L'unité qui, dans le système binaire, occupe la première place (extrême droite) est une unité ordinaire. L'unité de l'ordre suivant qui occupe la deuxième place (en comptant à partir de la droite) désigne un 2, l'unité suivante désigne un 4, puis un 8, etc.

Par exemple, le nombre $19=16+2+1$ s'écrira dans le système binaire sous la forme 10011. Ainsi une chaîne de basculeurs compte le nombre

de signaux reçus et l'inscrit suivant le système binaire. Notons que la commutation d'un basculeur c'est-à-dire l'enregistrement d'une impulsion, dure seulement *quelques dix-millionièmes de seconde* ! Un compteur moderne à basculeur peut « compter » jusqu'à un million d'impulsions par seconde et même davantage. C'est 100 mille fois plus vite que le calcul qu'un homme peut faire sans appareil : l'œil humain ne peut pas distinguer des signaux se succédant à des intervalles inférieurs à 0,1 seconde.

Si on fait une chaîne de 20 basculeurs, c'est-à-dire si l'on inscrit le nombre de signaux reçus à l'aide de 20 chiffres de décomposition binaire seulement, on peut « compter » jusqu'à $2^{20}-1$; ce nombre est supérieur à 1 million. Avec une chaîne de 64 basculeurs on pourra inscrire le célèbre « nombre du jeu d'échecs ».

La possibilité de compter des centaines de milliers de signaux par seconde a une grande importance dans les expériences de physique nucléaire. On peut par exemple compter le nombre de différentes particules émises lors de la désintégration de l'atome.

10 mille opérations par seconde

Il est à noter que les circuits à bascule permettent également d'effectuer des opérations avec des nombres. Voyons par exemple comment on peut réaliser l'addition de deux nombres.

Considérons trois chaînes des basculeurs, connectées comme l'indique la fig. 3. La chaîne supérieure sert à inscrire le premier terme de l'addition, la deuxième inscrit le deuxième terme, et la chaîne d'en bas inscrit la somme. Au moment

de la mise en circuit de l'appareil, seules les bascules de la chaîne supérieure et de celle du milieu qui se trouvent en position 1 lancent des signaux aux basculeurs de la chaîne inférieure.

Admettons par exemple (fig. 3), que dans les deux premières chaînes on a inscrit les termes 101 et 111 (numération binaire). Le premier basculeur (celui d'extrême droite) de la chaîne d'en bas reçoit, au moment de la mise en circuit de l'appareil, deux impulsions venant du premier basculeur de chacun des termes. On sait qu'ayant reçu deux impulsions, le premier basculeur se retrouvera dans la position 0, mais enverra une impulsion réponse au deuxième basculeur. En outre, le deuxième basculeur reçoit un signal du deuxième terme de l'addition. Le deuxième basculeur reçoit ainsi deux impulsions ; il se retrouve par suite dans la position 0, après avoir envoyé une impulsion réponse au troisième basculeur. De plus, celui-ci reçoit encore deux impulsions (venant de chacun des termes de l'addition). Ayant reçu trois signaux, le troisième basculeur passera dans la position 1 et enverra une impulsion réponse. Cette impulsion réponse mettra la quatrième bascule dans la position 1, dans laquelle elle restera, ne recevant pas d'autres signaux. De cette façon, l'appareil représenté sur la fig. 3 a effectué (dans le système binaire) l'addition de deux nombres « en colonne » :

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

ou $5+7=12$, dans le système décimal. Les impulsions réponse dans la chaîne inférieure signifient que l'appareil, pour ainsi dire, « retient »

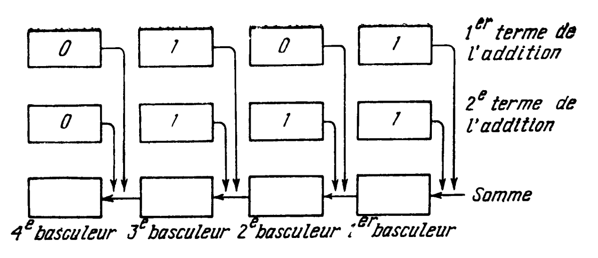


Fig. 3

1 et le transporte dans l'ordre suivant, comme nous le faisons ordinairement lorsque nous effectuons une addition en colonne.

Si chaque chaîne comprenait 20 basculeurs au lieu de 4, on pourrait additionner des nombres allant jusqu'à un million, etc.

Notons qu'en réalité le schéma de l'appareil servant à effectuer des additions est un peu plus compliqué que celui de la fig. 3. En particulier, l'appareil doit comporter des dispositifs spéciaux pour « retarder » les signaux. Sur le schéma de la fig. 3, les signaux des deux termes de l'addition arrivent *simultanément* au premier basculeur de la chaîne inférieure (au moment de la mise en circuit de l'appareil). Les deux signaux vont coïncider et le basculeur les recevra comme un *seul*. Pour éviter cela, les signaux des termes de l'addition ne doivent pas arriver simultanément, mais avec un certain retard l'un par rapport à l'autre. Ces retards font que l'addition de deux nombres demande plus de temps que l'enregistrement d'un signal dans un compteur à basculeurs.

En modifiant convenablement le schéma, on peut avec cet appareil effectuer la soustraction, la multiplication (cette dernière se ramène à des

additions répétées et demande plusieurs fois plus de temps que l'addition), la division, etc.

Les dispositifs dont nous avons parlé plus haut sont utilisés dans les machines à calculer modernes. Ces machines peuvent exécuter plus de 10 000 opérations par seconde ! Une telle vitesse peut sembler tout à fait inutile. Qu'est-ce que cela fait si la machine met un dixmillionième de seconde ou un quart de seconde pour élever au carré un nombre de 15 chiffres ? La solution nous paraîtra tout aussi « instantanée »...

Il faut se garder ici des conclusions hâtives. Prenons un exemple. Un bon joueur d'échecs, avant de faire un coup, analyse un grand nombre de variantes possibles. Si l'étude d'une variante demande plusieurs secondes, celle de nombreuses variantes peut demander plusieurs minutes, et même des dizaines de minutes. Il arrive souvent, au cours de parties difficiles, que les joueurs se trouvent à court de temps, c'est-à-dire qu'ils sont obligés de jouer un coup rapidement, ayant épuisé presque tout le temps dont ils disposaient pour analyser les coups précédents. Ne pourrait-on alors charger une machine de l'analyse des variantes ? Une machine capable d'effectuer des milliers de calculs par seconde devrait pouvoir, en effet, analyser toutes les variantes presque instantanément et ne serait jamais à court de temps...

On peut objecter à cela qu'effectuer un calcul, même très difficile, est une chose, et que jouer aux échecs en est une autre, dont une machine est incapable, qu'en étudiant différentes variantes, un joueur d'échecs ne se contente pas de compter, mais raisonne. Nous reviendrons sur ce problème tout à l'heure.

Le nombre de parties d'échecs possibles

Calculons approximativement le nombre de parties d'échecs différentes qui peuvent être jouées en général sur l'échiquier. Un calcul précis est ici impossible, mais nous allons examiner une tentative d'évaluer approximativement ce nombre. Dans le livre du mathématicien belge M. Kraitchik « Mathématique des jeux et récréations mathématiques » nous trouvons le calcul suivant :

« Lors du premier coup les blancs peuvent choisir parmi 20 possibilités (les 16 coups des 8 pions, dont chacun peut avancer de 1 ou de 2 cases, et 2 coups de chaque cavalier). Les noirs peuvent répondre par l'un des mêmes 20 coups. En combinant chaque coup des blancs avec chaque coup des noirs, nous avons $20 \cdot 20 = 400$ variantes après le premier coup de chaque joueur.

De plus, après le premier coup, le nombre des possibilités augmente. Si, par exemple, les blancs ont joué e2—e4, pour le deuxième coup ils peuvent choisir entre 29 variantes. Par la suite, le nombre de coups possibles devient encore plus grand. La dame, placée par exemple sur la case d5, peut choisir entre 27 coups (en supposant que toutes les cases où elle peut aller sont libres). Pour simplifier les calculs, nous adopterons les nombres moyens suivants :

20 variantes possibles pour les 2 joueurs lors des 5 premiers coups ;

30 variantes possibles pour chacun des joueurs lors des coups suivants.

Admettons en outre que le nombre moyen des coups lors d'une partie d'échecs ordinaire est égal à 40. Nous trouvons alors pour le nombre

de parties possibles l'expression

$$(20\cdot 20)^5\cdot(30\cdot 30)^{35}.»$$

Pour évaluer approximativement la valeur de cette expression, nous nous servirons des transformations et simplifications suivantes :

$$(20\cdot 20)^5\cdot(30\cdot 30)^{35}=20^{10}\cdot 30^{70}=2^{10}\cdot 3^{70}\cdot 10^{80}.$$

Remplaçons 2^{10} par le nombre 1000, soit 10^3, qui en diffère peu.
Représentons l'expression 3^{70} sous la forme

$$3^{70}=3^{68}\cdot 3^2\approx 10\,(3^4)^{17}\approx 10\cdot 80^{17}=10\cdot 8^{17}\cdot 10^{17}=$$
$$=2^{51}\cdot 10^{18}=2\,(2^{10})^5\cdot 10^{18}\approx$$
$$\approx 2\cdot 10^{15}\cdot 10^{18}=2\cdot 10^{33}$$

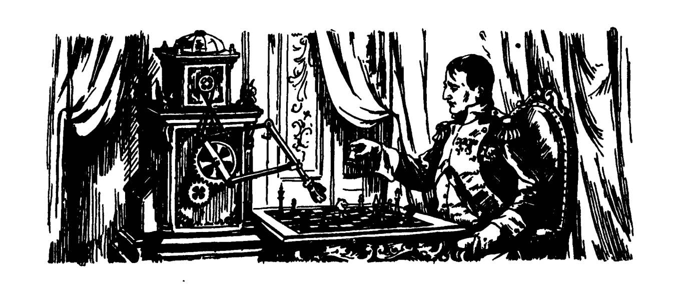
et par suite

$$(20\cdot 20)^5\cdot(30\cdot 30)^{35}\approx 10^3\cdot 2\cdot 10^{33}\cdot 10^{80}=2\cdot 10^{116}.$$

Ce nombre laisse loin derrière lui l'énorme quantité de grains de blé que l'inventeur du jeu d'échecs a demandée comme récompense ($2^{64}-1\approx 18\cdot 10^{18}$). Si toute la population du globe jouait aux échecs pendant 24 heures par jour à raison d'un coup par seconde, il faudrait au moins 10^{100} siècles pour épuiser toutes les parties d'échecs possibles.

Le secret de l'automate joueur d'échecs

Le fait que le nombre de combinaisons des pièces sur l'échiquier est pratiquement illimité suffit déjà à rendre fort improbable l'existence des célèbres « automates » joueurs d'échecs d'autrefois. L'explication est en fait très simple : il n'a jamais existé d'automates joueurs d'échecs,



mais seulement la croyance en ces automates. Celui du mécanicien hongrois Wolfgang von Kempelen (1734-1804) fut un des plus célèbres. L'inventeur présenta sa machine aux cours d'Autriche et de Russie, et puis au public de Paris et de Londres. Napoléon joua contre cet automate, persuadé que son adversaire était une machine. Vers le milieu du siècle dernier, l'automate a été détruit pendant un incendie à Philadelphie.

Les autres automates joueurs d'échecs n'ont pas joui d'une telle gloire, mais la foi en l'existence de ces machines a subsisté longtemps.

En réalité, aucun joueur d'échecs « automatique » n'agissait automatiquement. A l'intérieur de la machine était caché un bon joueur d'échecs, qui dirigeait le déplacement des pièces. L'« automate » de von Kempelen était une grande caisse pleine de mécanismes compliqués. La caisse portait un échiquier, dont la main d'une grande poupée déplaçait les pièces. Avant le commencement de la partie, on donnait au public la possibilité de s'assurer que la caisse ne contenait rien d'autre que le mécanisme. Cependant, une disposition habile y laissait assez de place

pour qu'un homme de petite taille puisse s'y cacher (ce rôle fut joué pendant un certain temps par les célèbres joueurs d'échecs Johann Allgaier et William Lewis). Il est probable que pendant que l'on montrait au public différentes parties de la caisse, l'homme qui y était caché passait discrètement dans le compartiment voisin. Le mécanisme ne participait pas au fonctionnement de l'appareil et servait seulement à masquer la présence du joueur.

De tout ce que nous venons de dire on peut conclure : le nombre de parties d'échecs est pratiquement illimité, et les dispositifs mécaniques capables, de choisir automatiquement le coup le plus juste n'existent que dans l'esprit des gens crédules. Il n'y a donc pas à craindre une crise du jeu d'échecs.

Cependant, certains faits récents peuvent apporter quelques doutes quant à l'exactitude de cette conclusion : à l'heure actuelle *il existe déjà* des machines qui « jouent » aux échecs. Ce sont des machines mathématiques, qui peuvent effectuer des milliers de calculs par seconde. Nous en avons parlé plus haut. Mais comment une machine peut-elle « jouer » aux échecs ?

Evidemment, une machine à calculer ne peut rien faire d'autre que des calculs, mais elle peut le faire suivant un schéma déterminé, d'après un *programme* établi d'avance.

Un programme pour le jeu d'échecs est établi par les mathématiciens en partant d'une *tactique* de jeu déterminée. Par « tactique » on entend un système de règles permettant, pour chaque position, de choisir un coup unique (le « meilleur » coup du point de vue de cette tactique). En voici un exemple. On attribue à chaque pièce un certain nombre de points :

Roi	+200 points	Pion isolé	—0,5 point
Dame	+ 9 points	Pion doublé	—0,5 point
Tour	+ 5 points		
Fou	+ 3 points		
Cavalier	+ 3 points		
Pion	+ 1 point		
Pion arriéré	— 0,5 point		

De plus, on évalue les avantages de position (mobilité des pièces, leur disposition plus près du centre, etc.), qui s'expriment en dixièmes de point. Retranchons de la somme des points des pièces blanches la somme des points des pièces noires. Si cette différence est positive, les blancs ont l'avantage, et si elle est négative, ce sont les noirs qui l'emportent.

La machine calcule les variations possibles de cette différence au cours des 3 coups suivants, choisit la meilleure variante de toutes les combinaisons possibles à 3 coups, et l'imprime sur une fiche spéciale : « le coup » est joué *. Le temps demandé par la machine pour un coup varie en fonction du programme et de la vitesse de fonctionnement de la machine, mais il est toujours très court.

Evidemment, la faculté de ne combiner que 3 coups d'avance caractérise la machine comme

* Il existe d'autres espèces de « tactique ». Ainsi, on peut considérer non pas tous les coups possibles de l'adversaire, mais seulement les coups « forts » (échec, prise d'une pièce, attaque, défense, etc.). Ensuite, pour des coups très forts de l'adversaire, on peut faire le calcul pour plus de 3 coups d'avance. On peut également utiliser un autre barême pour l'évaluation des pièces. Selon la tactique choisie, le « style de jeu » de la machine change.

un « joueur » assez faible *. Mais il est certain qu'avec les progrès rapides du calcul mécanique, les machines « apprendront » bientôt à « jouer » aux échecs beaucoup mieux.

Il serait difficile d'exposer dans ce livre l'élaboration d'un programme pour une partie d'échecs destiné aux machines à calculer. Nous examinerons le programme le plus simple au chapitre suivant.

A l'aide de trois 2

Problème

Tout le monde sait probablement comment on peut représenter le plus grand nombre possible à l'aide de trois chiffres. Il faut placer trois neuf ainsi :

$$9^{9^9},$$

c'est-à-dire écrire la troisième « surpuissance » de 9. Ce nombre est tellement grand qu'aucune image ne permet de se rendre compte de sa valeur. Par comparaison, le nombre d'électrons connus dans le monde visible est infime. Dans mon livre l'*Arithmétique récréative* il était question de ce nombre, mais je reviens à ce problème parce que je veux en proposer un autre analogue :

A l'aide de trois 2, sans utiliser les signes d'opérations mathématiques, écrire le plus grand nombre possible.

Solution

Sous l'influence de la disposition des 9 en trois étages, on est prêt à disposer les 2 de la même façon :

$$2^{2^2},$$

---

* Dans les parties jouées par les meilleurs joueurs on trouve des combinaisons prévues pour 10 coups en avance.

Mais cette fois on n'obtiendra pas l'effet attendu.

Ce nombre n'est pas grand, il est même très inférieur à 222. En effet, nous n'avons écrit que 2^4, c'est-à-dire 16.

Le plus grand nombre formé de trois 2 n'est pas 222 ni 22^2 (c'est-à-dire 484), mais

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

Cet exemple est riche en enseignements. Il montre qu'en mathématiques, il est souvent dangereux d'agir par analogie.

A l'aide de trois 3

Problème

Maintenant vous serez probablement plus prudent en abordant la solution du problème suivant.

A l'aide de trois 3, sans utiliser les signes d'opérations mathématiques, écrire le plus grand nombre possible.

Solution

La disposition des chiffres en trois étages ne donne pas non plus ici le résultat attendu, car

$$3^{3^3}, \text{ soit } 3^{27}, \text{ est inférieur à } 3^{33}.$$

C'est ce dernier nombre qui donne la réponse exacte.

A l'aide de trois 4

Problème

A l'aide de trois 4 et sans utiliser les signes d'opérations mathématiques, écrire le plus grand nombre possible.

Solution

Si vous agissez ici comme pour les deux problèmes précédents, c'est-à-dire si vous donnez comme réponse

$$4^{44},$$

vous vous tromperez encore, parce que cette fois, c'est la disposition des chiffres en trois étages

$$4^{4^4}$$

qui donne le plus grand nombre. En effet, $4^4=256$, et 4^{256} est plus grand que 4^{44}.

A l'aide de trois chiffres identiques

Essayons de pénétrer ce fait étonnant et d'établir la cause pour laquelle certains chiffres disposés en trois étages donnent des nombres énormément grands, et d'autres n'en donnent pas. Considérons le cas général.

A l'aide de trois *chiffres identiques*, sans utiliser les signes d'opérations mathématiques, écrire le plus grand nombre possible.

Désignons le chiffre par la lettre *a*. A la disposition

$$2^{22},\quad 3^{33},\quad 4^{44}$$

correspond l'inscription

$$a^{10a+a},\quad \text{ou}\quad a^{11a}.$$

Une disposition à trois étages sera présentée dans sa forme générale de la façon suivante :

$$a^{a^a}.$$

Déterminons pour quelle valeur de *a* cette disposition représente un nombre plus grand que la première. Etant donné que les deux expressions

représentent des puissances à facteurs entiers égaux, la plus grande valeur correspond au plus grand exposant.

Quand a-t-on alors

$$a^a > 11a\ ?$$

Divisons les deux parties de l'inégalité par a. Nous obtenons :

$$a^{a-1} > 11.$$

Il est facile de voir que a^{a-1} est plus grand que 11 seulement lorsque a est plus grand que 3 ; en effet,

$$4^{4-1} > 11,$$

tandis que les puissances 3^2 et 2^1 sont inférieures à 11.

On comprend maintenant les résultats inattendus que nous avons trouvés tout à l'heure : la disposition des chiffres change à partir de 4.

A l'aide de quatre unités

Problème

A l'aide de quatre unités et sans se servir de signes d'opérations mathématiques, écrire le plus grand nombre possible.

Solution

Le nombre 1111 qui vient naturellement à l'esprit ne répond pas à l'énoncé du problème, puisque la puissance 11^{11} lui est plusieurs fois supérieure. On calculera facilement ce nombre à l'aide d'une table de logarithmes.

Ce nombre dépasse 285 milliards, et par suite, est plus de 25 000 000 de fois supérieur à 1111.

A l'aide de quatre 2

Problème

Faisons le pas suivant dans l'étude des problèmes de ce type, et posons la même question pour le cas de quatre 2.

Comment faut-il disposer quatre 2 pour avoir le plus grand nombre ?

Solution

Huit combinaisons sont possibles :

$$2222, \quad 222^2, \quad 22^{22}, \quad 2^{222},$$
$$22^{2^2}, \quad 2^{22^2}, \quad 2^{2^{22}}, \quad 2^{2^{2^2}}.$$

Lequel de ces nombres est le plus grand ?

Occupons-nous d'abord de la première ligne, c'est-à-dire, des nombres disposés en deux étages.

Le premier de ces nombres —2222 — est évidemment plus petit que les trois autres. Pour comparer les deux nombres suivants

$$222^2 \quad \text{et} \quad 22^{22}$$

transformons le second :

$$22^{22} = 22^{2 \cdot 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Le dernier nombre est plus grand que 222^2 car le facteur et l'exposant de la puissance 484^{11} sont plus grands que ceux de la puissance 222^2.

Comparons, maintenant 22^{22} avec le quatrième nombre de la première ligne, c'est-à-dire avec 2^{222}. Remplaçons 22^{22} par un nombre plus grand, par exemple 32^{22}, et montrons que même ce dernier nombre est inférieur à 2^{222}.

Nous avons

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

qui est une puissance inférieure à 2^{222}.

Ainsi, 2^{222} est le plus grand nombre de la ligne supérieure.

Il nous reste à comparer cinq nombres : celui que nous venons d'indiquer et les quatre nombres suivants

$$22^{2^2}, \quad 2^{22^2}, \quad 2^{2^{22}}, \quad 2^{2^{2^2}}.$$

Le dernier nombre qui n'est égal qu'à 2^{16} doit être éliminé immédiatement. Ensuite, le premier nombre de cette ligne, égal à 22^4 et inférieur à 32^4 ou à 2^{20}, est inférieur à chacun des deux nombres suivants. Il reste donc à comparer trois nombres dont chacun est une puissance de deux. Il est clair que le plus grand sera le nombre dont l'exposant est plus grand. Mais de trois exposants

$$222, \quad 484 \quad \text{et} \quad 2^{20+2} \, (= 2^{10 \cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4)$$

c'est le dernier qui est le plus grand.

Par conséquent, le plus grand nombre qu'on puisse représenter à l'aide de quatre 2 est :

$$2^{2^{22}}.$$

Sans recourir à une table de logarithmes, nous pouvons nous faire une idée approximative de la valeur de ce nombre en nous servant de l'égalité approchée

$$2^{10} \approx 1000.$$

En effet,

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6,$$
$$2^{2^{22}} \approx 2^{4000000} > 10^{1200000}.$$

Ce dernier nombre comprend plus d'un million de chiffres.

CHAPITRE II

LE LANGAGE DE L'ALGÈBRE

L'art de poser des équations

Les équations sont le langage de l'algèbre. « Vous voyez que dans les problèmes qui ne renferment que des nombres ou des quantités abstraites, il n'y a pour ainsi dire rien autre chose à faire qu'à traduire la question du langage ordinaire en langage algébrique », écrivait Newton dans son *Arithmétique universelle.* Il a montré par des exemples comment se fait cette traduction. En voici un :

Question exprimée en langage ordinaire :	La même, en langage algébrique :
Un marchand possède une certaine somme d'argent	x
La première année il dépense sur cette somme cent livres	$x - 100$
Il augmente ce qui lui reste d'un tiers	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$

Question exprimée en langage ordinaire :	La même, en langage algébrique :
La seconde année il dépense encore cent livres	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
Il augmente ensuite ce qui lui reste d'un tiers	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=$ $=\frac{16x-2800}{9}$
La troisième année il dépense encore cent livres	$\frac{16x-2800}{9}-100=$ $=\frac{16x-3700}{9}$
Il augmente ce qui lui reste d'un tiers	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=$ $=\frac{64x-14800}{27}$
Il se trouve alors deux fois plus riche qu'au commencement de la première année	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Pour trouver le capital initial du marchand il ne reste qu'à résoudre la dernière équation.

La résolution des équations est souvent chose aisée ; poser les équations suivant l'énoncé du problème est plus difficile. Vous avez vu que l'art de poser les équations se réduit en réalité à les traduire « du langage ordinaire en langage algébrique ». Mais ce dernier est laconique ; c'est

pourquoi il n'est pas toujours facile de traduire les expressions du langage ordinaire. Les difficultés de cette traduction sont très diverses, comme le lecteur pourra s'en convaincre dans les exemples suivants concernant l'établissement des équations du premier degré.

La vie de Diophante

Problème

L'histoire nous a laissé peu de renseignements sur la vie de Diophante, remarquable mathématicien grec du IIIe siècle. Tout ce que nous savons de lui a été puisé dans une inscription gravée sur sa tombe et rédigée sous forme d'un problème mathématique. La voici :

En langage ordinaire :	En langage algébrique :
Passant! Ci-gît Diophante. Les chiffres diront la durée de sa vie	x
Sa douce enfance en fait le sixième	$\frac{x}{6}$
Un douzième de sa vie a passé, et son menton s'est couvert de duvet	$\frac{x}{12}$
Marié, il a vécu le septième de sa vie sans enfants	$\frac{x}{7}$

En langage ordinaire :	En langage algébrique :
Cinq ans ont passé; la naissance d'un fils l'a rendu heureux	5
Le sort a voulu que la vie de ce fils soit deux fois plus courte que celle de son père	$\frac{x}{2}$
Plein de tristesse, le vieillard a rendu l'âme quatre ans après la mort de son fils	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+$ $+5+\frac{x}{2}+4$
Dis, passant quel âge avait atteint Diophante lorsque la mort l'a enlevé ?	

Solution

Ayant résolu l'équation et trouvé $x=84$, nous obtenons les renseignements suivants sur Diophante : il se maria à l'âge de 21 ans, devint père à l'âge de 38 ans, perdit son fils à l'âge de 80 ans et mourut à 84 ans.

Le cheval et mulet

Problème

Voici encore un vieux problème facile à traduire du langage ordinaire en langage algébrique.

« Un cheval et un mulet, portant chacun un lourd fardeau, allaient côte à côte. Le cheval se

plaignait du poids excessif de son fardeau. « De quoi te plains-tu ? lui dit le mulet. Si je te prends un sac, ma charge sera deux fois plus lourde que la tienne. Mais si tu prends un sac de mon dos, ton fardeau sera égal au mien. »

Dites-nous, mathématiciens éclairés, combien de sacs portait le cheval et combien en portait le mulet ? »

Solution

Si je te prends un sac	$x-1$
mon fardeau	$y+1$
sera deux fois plus lourd que le tien	$y+1=2(x-1)$
Mais si tu me prends un sac	$y-1$
ton fardeau	$x+1$
sera égal au mien	$y-1=x+1$

Nous avons donc un système d'équations à deux inconnues :

$$\left.\begin{array}{l} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ y-x=2. \end{array}\right.$$

Nous résolvons ce système et trouvons $x=5$, $y=7$. Le cheval avait sur son dos cinq sacs et le mulet en avait sept.

Les quatre frères

Problème

Quatre frères ont 45 roubles. Si l'on augmente la somme du premier de deux roubles, si l'on réduit celle du deuxième de deux roubles, si l'on double la somme du troisième et si l'on diminue de moitié celle du quatrième, chacun d'eux aura la même somme. Combien d'argent avait chaque frère ?

Solution

Quatre frères ont 45 roubles	$x+y+z+t=45$
Si l'on augmente la somme du premier de 2 roubles,	$x+2$
si l'on réduit celle du deuxième de 2 roubles,	$y-2$
si l'on double la somme du troisième	$2z$
et si l'on diminue de moitié celle du quatrième	$\frac{t}{2}$
chacun d'eux aura la même somme	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

Ecrivons cette dernière équation sous forme de trois équations séparées:

$$x+2=y-2,$$
$$x+2=2z,$$
$$x+2=\frac{t}{2},$$

d'où

$$y = x + 4$$
$$z = \frac{x+2}{2},$$
$$t = 2x + 4$$

En portant ces valeurs dans la première équation nous obtenons :

$$x + x + 4 + \frac{x+2}{2} + 2x + 4 = 45.$$

d'où $x=8$. On trouve ensuite : $y=12$, $z=5$, $t=20$. Les frères avaient donc respectivement 8, 12, 5 et 20 roubles.

Des oiseaux sur les rives du fleuve

Problème

Chez un mathématicien arabe du XI[e] siècle on trouve le problème suivant.

Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier, l'un vis-à-vis de l'autre. La hauteur du premier est de 30 aunes et celle du second de 20 aunes ; la distance entre leurs pieds est de 50 aunes. Un oiseau est perché sur la cime de chaque arbre. Brusquement les oiseaux ont aperçu un poisson à la surface de l'eau ; ils se sont jetés simultanément sur lui et l'ont atteint au même instant (fig. 4).

A quelle distance du plus grand palmier se trouvait le poisson ?

Solution

D'après la figure 5, on obtient, à l'aide du théorème de Pythagore,

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2, \quad \overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$



Fig. 4

Mais $AB = AC$, puisque les deux oiseaux ont mis le même temps pour traverser ces distances. D'où :

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Effectuant la parenthèse et simplifiant, on obtient une équation de premier degré :

$$100x = 2000,$$

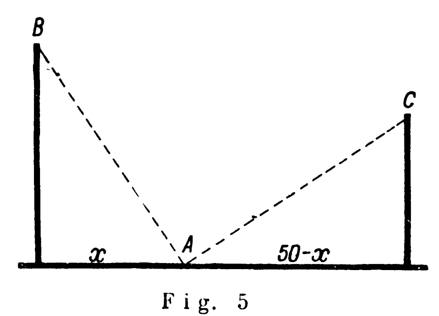


Fig. 5

a ou

$$x = 20.$$

Le poisson est apparu à une distance de 20 aunes du plus grand palmier.

Une promenade

Problème

— Venez me voir demain dans l'après-midi, a dit le vieux médecin à un jeune homme de sa connaissance.

— Merci. Je sortirai à trois heures. Si l'envie vous prend de vous promener un peu, sortez à la même heure, nous nous rencontrerons à mi-chemin.

— Mais vous oubliez que je suis vieux, que je ne fais que 3 km à l'heure, tandis que vous faites au minimum 4 km à l'heure. Vous devriez me laisser une certaine avance.

— D'accord. Puisque je fais 1 km de plus que vous à l'heure, je vous fais cadeau de ce kilomètre et je sortirai un quart d'heure plus tôt. Cela suffit ?

— C'est très aimable à vous, a répondu le vieillard.

Le jeune homme a tenu sa promesse. Il sortit à 3 heures moins le quart et marcha à une vitesse de 4 km à l'heure. Le médecin sortit à 3 heures précises et alla à une vitesse de 3 km à l'heure. Quand ils se furent rencontrés, le vieillard rebroussa chemin et rentra à la maison accompagné de son jeune ami.

Plus tard, revenu chez lui, le jeune homme se rendit compte qu'à cause du quart d'heure accordé

au médecin, il avait fait un chemin quatre fois plus long que celui fait par le médecin.

Quelle est la distance qui sépare la maison du médecin de celle de son jeune ami ?

Solution

Désignons la distance entre les deux maisons par x(km).

Le jeune homme a fait en tout $2x$ et le médecin quatre fois moins, soit $\frac{x}{2}$. Avant la rencontre, le médecin a fait la moitié de la distance totale parcourue par lui, c'est-à-dire $\frac{x}{4}$; le jeune homme a fait le reste, c'est-à-dire $\frac{3x}{4}$. Le médecin a parcouru son chemin en $\frac{x}{12}$ heure, et le jeune homme a parcouru le sien en $\frac{3x}{16}$ heure ; on sait d'autre part qu'il a marché un quart d'heure de plus que le médecin.

On a donc l'équation

$$\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{4},$$

d'où $x=2,4$ km.

La distance qui sépare la maison du jeune homme de celle du médecin est de 2,4 km.

L'équipe de faucheurs

Dans ses souvenirs sur Léon Tolstoï, le physicien A. Tzinger mentionne un problème qui plaisait beaucoup au grand écrivain :

« Une équipe de faucheurs avait à faucher deux prés dont l'un était deux fois plus grand

que l'autre. Durant une moitié de la journée, l'équipe a fauché une partie du grand pré. Ensuite elle s'est divisée en deux moitiés. Les faucheurs de la première moitié sont restés sur le grand pré, qu'ils ont fini de faucher vers le soir ; ceux de la seconde moitié ont fauché le deuxième pré également jusqu'au soir, mais il en est resté une parcelle qu'un faucheur a terminée le lendemain en une journée de travail.

Combien de faucheurs y avait-il dans l'équipe ? »

Solution

En plus de l'inconue principale, le nombre de faucheurs, que nous désignerons par x, il est commode d'introduire une inconnue auxiliaire, l'aire fauchée par un faucheur en un jour. Désignons-la par y. Bien qu'on ne demande pas dans ce problème de déterminer cette seconde inconnue, elle nous aidera à trouver l'inconnue principale.

Exprimons l'aire du grand pré à l'aide de x et y. x faucheurs, ayant travaillé sur ce pré pendant une moitié de la journée, ont fauché

$$x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}.$$

Pendant la seconde partie de la journée, la moitié de l'équipe, soit $\frac{x}{2}$ faucheurs, restée sur ce pré, a fauché $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$.

Puisque, vers le soir, le pré entier était fauché, son aire est :

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Exprimons maintenant à l'aide de x et y l'aire du second pré. Pendant une moitié de la journée, $\frac{x}{2}$ faucheurs y ont fauché $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$. Ajoutons l'aire de la parcelle non fauchée le premier jour et égale à y (aire fauchée par un faucheur en un jour), et nous trouvons l'aire du second pré :

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

Il ne reste plus qu'à traduire en langage algébrique la phrase : « le premier pré était deux fois plus grand », et l'équation est posée :

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2, \quad \text{ou} \quad \frac{3xy}{xy + 4y} = 2.$$

Divisons par y la fraction contenue dans le premier membre de l'équation ; l'inconnue auxiliaire est ainsi éliminée et l'équation prend la forme

$$\frac{3x}{x+4} = 2, \quad \text{ou} \quad 3x = 2x + 8,$$

d'où $x = 8$.

L'équipe se composait de 8 faucheurs.

Après la parution de la première édition de l'*Algèbre récréative* le professeur A. Tzinger m'a envoyé une très intéressante note concernant ce problème. A son avis, l'intérêt principal de celui-ci réside dans le fait qu'il s'agit « non d'un problème algébrique, mais d'un problème arithmétique très simple, qui ne paraît difficile qu'à cause de sa forme peu banale ».

« L'histoire de ce problème est la suivante, écrit le professeur Tzinger. Aux temps où mon père et mon oncle I. Raïevski (ami intime de Léon Tolstoï) étudiaient à la faculté de mathématiques de l'Université de Moscou, on y donnait

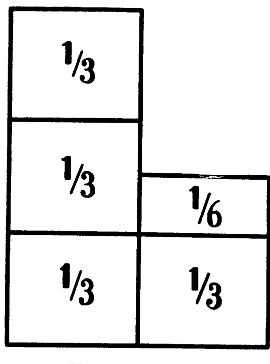


Fig. 6

un cours de pédagogie. Les étudiants devaient aller dans une école primaire de la ville désignée spécialement, et là, en collaboration avec de bons instituteurs, se préparer à l'enseignement. Parmi les camarades de mon père et de Raïevski, il y avait un étudiant nommé Pétrov, très doué et à l'esprit original. Ce Pétrov (qui est mort très jeune de la phtisie) affirmait qu'aux leçons d'arithmétique on fait du tort aux élèves en ne les habituant à résoudre que des problèmes peu originaux. Pour prouver son idée, Pétrov composait des problèmes, qui, par suite de leur originalité, mettaient en échec des « instituteurs expérimentés et habiles », mais étaient résolus par des élèves capables, non encore gâtés par les méthodes de routine. Parmi ces problèmes se trouve celui de l'équipe de faucheurs. Des instituteurs expérimentés, évidemment, pouvaient le résoudre facilement à l'aide d'une équation, mais sa solution arithmétique leur échappait. Et pourtant, ce problème est tellement simple que l'emploi de l'algèbre est ici inutile.

S'il a fallu une demi-journée à l'équipe entière, plus une demi-journée à la moitié de l'équipe pour faucher entièrement le grand pré, il est clair qu'en une demi-journée, la moitié de l'équipe fauchait $\frac{1}{3}$ du pré. Par suite, sur le petit pré il restait non fauchée une aire de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Sachant qu'un ouvrier a fauché en un jour $\frac{1}{6}$ du pré, et qu'en tout on a fauché $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, il en résulte que l'équipe comprenait 8 faucheurs.

Tolstoï, qui a toujours aimé les problèmes originaux, connaissait déjà ce problème par mon père du temps de leur jeunesse. Un jour que je parlais de ce problème avec Tolstoï, il se montra ravi du fait que le problème devenait beaucoup plus clair et accessible si on se servait pour sa solution d'une figure des plus simples (fig. 6).»

Nous rencontrerons encore quelques problèmes qui, avec une certaine ingéniosité, sont plus faciles à résoudre par l'arithmétique que par l'algèbre.

Les vaches dans le pré

Problème

« ...Dans l'étude des sciences, les exemples sont bien plus utiles que les préceptes », écrivait Newton dans son *Arithmétique universelle*, et il illustrait lui-même ses raisonnements théoriques de nombreux exemples. Parmi ces exercices se trouve le problème des bœufs qui paissaient dans un pré. Ce problème est le prototype d'une série de problèmes originaux du genre suivant :

« L'herbe d'un pré pousse partout avec la même vitesse et la même densité. On sait que 70 vaches la mangeraient en 24 jours et 30 vaches en 60 jours. Combien de vaches mangeraient l'herbe du pré en 96 jours ? »

Ce problème a servi de sujet à un récit humoristique qui rappelle *Le répétiteur* de Tchékhov. Deux personnes de la famille de l'élève auquel on a donné ce problème à résoudre cherchent en vain la réponse et raisonnent ainsi :

— Il y a quelque chose d'étrange là-dedans, dit l'un d'eux ; si en 24 jours 70 vaches mangent toute l'herbe du pré, combien de vaches la mangeront en 96 jours ? Evidemment, $\frac{1}{4}$ de 70, c'est-à-dire 17 vaches $\frac{1}{2}$... Première bêtise ! Et voici la deuxième : 30 vaches mangent toute l'herbe en 60 jours ; combien de vaches la mangeront en 96 jours ? Le résultat est encore pire : 18 vaches $\frac{3}{4}$. De plus : si 70 vaches mangent toute l'herbe en 24 jours, 30 vaches la mangeront en 56 jours, et pas du tout en 60 jours, comme l'énonce le problème.

— Avez-vous tenu compte du fait que l'herbe pousse tout le temps ? demande l'autre.

Cette remarque est fondée : l'herbe pousse de façon continue, et si l'on ne tient pas compte de ce fait, on ne pourra pas résoudre le problème et son énoncé même paraîtra contradictoire.

Solution

Introduisons également ici une inconnue auxiliaire désignant la croissance journalière de l'herbe, exprimée en parts de sa réserve sur le

pré. En un jour cette croissance est égale à y et en 24 jours à $24\,y$; si on pose la réserve totale d'herbe égale à 1, en 24 jours les vaches mangeront

$$1+24y.$$

En un jour, le troupeau de 70 vaches mangera

$$\frac{1+24y}{24}$$

et une vache

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}.$$

De la même façon, en partant de la condition selon laquelle 30 vaches auraient mangé l'herbe du même pré en 60 jours nous déduisons qu'une vache mange en 24 heures

$$\frac{1+60y}{30\cdot 60}.$$

Mais la quantité d'herbe mangée par une vache en un jour est la même pour les deux troupeaux. Par suite :

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+60y}{30\cdot 60},$$

d'où

$$y=\frac{1}{480}.$$

Après avoir trouvé y, il n'est pas difficile de déterminer quelle part de la réserve initiale d'herbe est mangée par une vache en un jour :

$$\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+24\cdot\frac{1}{480}}{24\cdot 70}=\frac{1}{1\,600}.$$

Finalement donc, nous avons l'équation nécessaire pour la solution définitive du problème :

si le nombre de vaches cherché est x, on a:

$$\frac{1+96\cdot\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600},$$

d'où

$$x=20.$$

20 vaches mangeraient toute l'herbe en 96 jours.

Le problème de Newton

Examinons maintenant le problème de Newton, sur le modèle duquel a été établi celui que nous venons de résoudre.

D'ailleurs, ce problème n'a pas été composé par Newton ; c'est une création populaire.

« Trois prés couverts d'herbe de même densité et de même vitesse de croissance ont les superficies suivantes: 3 ha $\frac{1}{3}$, 10 ha et 24 ha. Le premier peut nourrir 12 bœufs pendant 4 semaines ; le second peut nourrir 21 bœufs pendant 9 semaines. On demande combien de bœufs pourra nourrir le troisième pré pendant 18 semaines ?

Solution

Introduisons une inconnue auxiliaire y désignant la part de la réserve initiale d'herbe qui pousse sur 1 ha pendant une semaine. Sur le premier pré, il pousse pendant une semaine une quantité d'herbe égale à $3\frac{1}{3}y=\frac{10}{3}y$, et pendant 4 semaines $\frac{10}{3}y\cdot 4=\frac{40}{3}y$ de la réserve qu'il avait initialement sur la superficie d'un ha. Tout se passe comme si la superficie initiale du pré

avait augmenté et était devenue égale à

$$\left(\frac{10}{3}+\frac{40}{3}y\right) \text{ ha.}$$

Autrement dit, les bœufs ont mangé autant d'herbe qu'il y en aurait eu sur un pré d'une superficie de $\frac{10}{3}+\frac{40}{3}y$ ha. En une semaine, 12 bœufs ont mangé le quart de cette quantité, et un bœuf en a mangé le $\frac{1}{48}$, soit la réserve se trouvant sur une superficie de

$$\left(\frac{10}{3}+\frac{40y}{3}\right):48=\frac{10+40y}{144} \text{ ha.}$$

On trouve de la même manière la superficie d'un pré qui nourrit un bœuf pendant une semaine en partant des données indiquées pour le deuxième pré :

accroissement par 1 ha en une semaine $=y$
accroissement par 1 ha en neuf semaines $=9y$
accroissement sur 10 ha en neuf semaines $=90y$.

La surface du pré capable de nourrir 21 bœufs pendant 9 semaines est égale à $10+90y$.

La superficie qui suffit pour nourrir 1 bœuf pendant une semaine est égale à

$$\frac{10+90y}{9\cdot 21}=\frac{10+90y}{189} \text{ ha.}$$

La quantité d'herbe consommée par un bœuf dans les deux cas doit être la même. On a donc

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+90y}{189}.$$

En résolvant cette équation, on trouve $y=\frac{1}{12}$.

Déterminons maintenant la superficie du pré dont la réserve d'herbe suffit pour nourrir

un bœuf pendant une semaine :

$$\frac{10+40y}{144}=\frac{10+40\cdot\frac{1}{12}}{144}=\frac{5}{54}\text{ ha.}$$

Abordons enfin la question posée dans le problème. En désignant le nombre de bœufs par x, on a

$$\frac{24+24\cdot 18\cdot\frac{1}{12}}{18x}=\frac{5}{54},$$

d'où $x=36$.

Le troisième pré peut nourrir 36 bœufs pendant 18 semaines.

Permutation des aiguilles d'une montre

Problème

Un jour qu'Albert Einstein était malade, son ami et biographe A. Mochkovski lui proposa pour le distraire le problème suivant (fig. 7) :

« Prenons la position des aiguilles à 12 heures. Si dans cette position la grande et la petite aiguilles échangent leurs places, leurs indications resteront tout de même exactes. Mais à d'autres instants, par exemple, à six heures, une pareille permutation conduirait à une position impossible avec une montre qui marche bien : la grande aiguille ne peut pas se trouver sur 6 quand la petite indique 12. Une question se pose alors : quand est-ce que les aiguilles d'une montre occupent une position telle que leur interversion donne une nouvelle position, également possible avec une montre en bon état ?

— Oui, répondit Einstein, c'est un problème qui convient bien à un homme contraint de garder

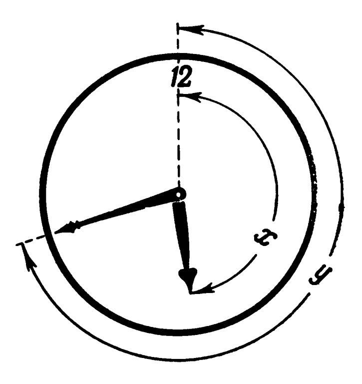


Fig. 7

le lit : assez intéressant et pas trop facile. Mais je crains que la distraction ne dure pas longtemps car j'ai déjà trouvé la solution. »

« Rapidement, écrit Mochkovski, il a tracé sur un morceau de papier un schéma représentant les conditions du problème. Pour le résoudre il a mis moins de temps que je n'ai mis, moi, pour l'exposer...»

Comment résoudre ce problème ?

Solution

En partant du point où se trouve le nombre 12, mesurons les distances des aiguilles sur le cadran en soixantièmes de la circonférence.

Supposons qu'une des positions requises des aiguilles a été observée quand la petite aiguille a parcouru x soixantièmes du cadran à partir du nombre 12, et la grande aiguille y soixantièmes. Etant donné que la petite aiguille se déplace de 60 divisions en 12 heures soit de 5 divisions à

l'heure, elle a parcouru x divisions en $\frac{x}{5}$ d'heure. Autrement dit, $\frac{x}{5}$ d'heure se sont écoulés depuis l'instant où la montre indiquait 12. La grande aiguille a parcouru y divisions en y minutes, c'est-à-dire en $\frac{y}{60}$ d'heure. Ainsi, la grande aiguille a passé par 12 il y a $\frac{y}{60}$ d'heure, c'est-à-dire $\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$ heures après l'instant où *les deux* aiguilles indiquaient 12. Ce nombre est un nombre entier (de 0 à 11) car il indique combien d'heures *entières* se sont écoulées depuis 12.

Si on intervertit les aiguilles, on trouve de façon analogue que, depuis 12 heures jusqu'à l'heure indiquée par les aiguilles, $\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$ heures entières se sont écoulées. Ce nombre est également un nombre entier (de 0 à 11).

Nous avons le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m, \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n \end{cases}$$

où m et n sont des paramètres entiers qui peuvent varier de 0 à 11.

Nous trouvons donc :

$$\begin{cases} x = \frac{60\,(12m + n)}{143}, \\ y = \frac{60\,(12n + m)}{143}. \end{cases}$$

En donnant à m et à n les valeurs comprises entre 0 et 11, nous trouverons toutes les positions requises des aiguilles. Puisque chacune des 12

valeurs de m peut être combinée avec chacune des 12 valeurs de n, il semble que le nombre de solutions est égal à $12 \cdot 12 = 144$. Mais en réalité il est égal à 143 car pour $m=0$ et $n=0$, ainsi que pour $m=11$ et $n=11$ on obtient la même position des aiguilles.

Pour $m=11$ et $n=11$ on a :

$$x=60, \quad y=60,$$

c'est-à-dire que les deux aiguilles indiquent le 12 comme dans le cas où $m=0$ et $n=0$.

Nous ne considérerons pas toutes les positions possibles ; prenons seulement deux exemples.

Premier exemple :

$$m=1, \quad n=1\ ;$$

$$x=\frac{60 \cdot 13}{143}=5\frac{5}{11}, \quad y=5\frac{5}{11},$$

c'est-à-dire que la montre marque 1 heure 5 minutes et $\frac{5}{11}$; à cet instant, les aiguilles coïncident, et on peut évidemment les intervertir.

Second exemple :

$$m=8, \quad n=5\ ;$$

$$x=\frac{60\,(5+12 \cdot 8)}{143} \approx 42{,}38,$$

$$y=\frac{90\,(8+12 \cdot 5)}{143} \approx 28{,}53.$$

Instants correspondants : 8h 28 mn $\frac{53}{100}$ et 5h 42 mn $\frac{38}{100}$.

Nous connaissons le nombre de solutions qui est égal à 143. Pour trouver tous les points du cadran qui donnent les positions requises des aiguilles, il faut diviser la circonférence du cadran

en 143 parties égales et nous obtiendrons les 143 points cherchés. Sur tous les points intermédiaires, l'interversion des aiguilles est impossible.

Coïncidence des aiguilles d'une montre

Problème

Combien y a-t-il de positions, sur le cadran d'une montre en bon état, où la grande et la petite aiguilles coïncident ?

Solution

Nous pouvons nous servir des équations établies lors de la solution du problème précédent. Si la grande et la petite aiguilles coïncident, on peut les intervertir sans rien changer. Les deux aiguilles ont parcouru le même nombre de divisions à partir du nombre 12, autrement dit $x=y$. Ainsi, les raisonnements du problème précédent donnent l'équation

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{60}=m,$$

où m est un nombre entier compris entre 0 et 11. De cette équation on tire :

$$x=\frac{60m}{11}.$$

Des 12 valeurs possibles de m (de 0 à 11), nous obtenons seulement 11 positions des aiguilles, car pour $m=11$ nous trouvons $x=60$, c'est-à-dire que les deux aiguilles ont parcouru 60 divisions et se retrouvent sur le 12 ; on obtient le même résultat pour $m=0$.

Les sept joueurs

Problème

Sept joueurs ont convenu que chaque perdant paierait aux autres joueurs son tapis, c'est-à-dire le montant exact de la somme que chacun possède.

Ils ont joué sept parties. Chacun des joueurs a perdu une fois. Le jeu fini, les joueurs ont compté leur argent et il s'est avéré que tous avaient la même somme : 12 roubles 80 kopecks.

Quelle somme avait chaque joueur avant le jeu ?

Solution

Malgré sa difficulté apparente, le problème est assez facile à résoudre si l'on tient compte du fait que pendant le jeu la somme totale détenue par les joueurs reste la même ; l'argent passe simplement de la poche d'un joueur dans celle d'un autre. La somme totale avant le jeu est donc égale à la somme totale après le jeu, soit $7 \cdot 12{,}8$ roubles.

Nous allons voir maintenant comment le jeu a modifié la somme d'argent du joueur qui a perdu le premier.

Avant le commencement du jeu il a x roubles.

Après la *première* partie, ayant perdu, il paye aux six autres joueurs le montant de la somme qu'ils possèdent ensemble, c'est-à-dire $7 \cdot 12{,}8 - x$.

Il lui reste donc après la première partie

$$x - (7 \cdot 12{,}8 - x) = 2x - 7 \cdot 12{,}8$$

Après la *deuxième* partie, cette somme se trouve doublée, et il a

$$2\,(2x - 7 \cdot 12{,}8).$$

Après la *troisième* partie son argent double de nouveau, et la somme devient égale à

$$2^2(2x-7\cdot 12{,}8).$$

Après la *quatrième* partie il a

$$2^3(2x-7\cdot 12{,}8), \text{ etc}$$

Après la *septième* partie, il possède $2^6(2x-$ $-7\cdot 12{,}8)$ roubles, mais on sait que cette somme est égale à 12 roubles 80 :

$$2^6(2x-7\cdot 12{,}8)=12{,}8.$$

Résolvons cette équation :

$$64(2x-7\cdot 12{,}8)=12{,}8,$$
$$2x-7\cdot 12{,}8=0{,}2,$$
$$2x-89{,}6=0{,}2; \quad x=44{,}9.$$

Ainsi, avant le commencement du jeu, le premier joueur avait 44 roubles 90 kopecks.

Déterminons, de la même façon, la somme d'argent possédée par le joueur qui était le deuxième à perdre.

Soit y cette somme.

Après la *première* partie il a $2y$.

Il perd la deuxième partie et paye $7\cdot 12{,}8-2y$; il lui reste alors $2y-(7\cdot 12{,}8-2y)=4y-7\cdot 12{,}8$.

Après la *troisième* partie il a :

$$2(4y-7\cdot 12{,}8).$$

Après la *quatrième* :

$$2^2(4y-7\cdot 12{,}8),$$

Et après la *septième* :

$$2^5(4y-7\cdot 12{,}8)=12{,}8,$$

d'où $y=22$ roubles 50 kopecks.

De la même façon nous trouvons que le troisième joueur avait 11 roubles 30 kopecks.

Nous laissons au lecteur le soin de trouver la somme que détenait chacun des autres joueurs. Comme preuve, on pourra utiliser le fait que la somme totale de l'argent avant et après le jeu était la même.

Une absurdité apparente

Problème

Voilà un problème qui peut paraître absolument absurde :

A quoi est égal le nombre 84 si $8 \cdot 8 = 54$?

Cette question étrange n'est pas dénuée de sens et le problème peut être résolu à l'aide d'équations.

Essayons de le déchiffrer.

Solution

Vous avez deviné, sans doute, que les nombres qui figurent dans le problème n'appartiennent pas au système décimal, sinon la question « à quoi est égal le nombre 84 » n'aurait pas de sens.

Soit x la base de ce système de numération inconnu. Le nombre 84 désigne alors 8 unités du deuxième ordre et 4 unités du premier ordre ; autrement dit :

$$«84» = 8x + 4.$$

Le nombre « 54 » désigne $5x+4$.

Nous avons l'équation

$$8 \cdot 8 = 5x + 4,$$

soit, suivant le système décimal,

$$64 = 5x + 4,$$

d'où $x=12$. Les nombres sont représentés suivant le système duodécimal et « 84 » $=8\cdot 12+4=100$. De cette façon, si $8\cdot 8=$ « 54 », « 84 » $=100$.

De la même manière on peut résoudre un problème analogue :

A quoi est égal le nombre 100 si $5\cdot 6=33$?

Réponse: 81 (système de numération de base 9).

L'équation pense pour nous

Si vous doutez qu'une équation puisse être plus prévoyante que nous-mêmes, résolvez le problème suivant :

Un père a 32 ans ; son fils a 5 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera égal à dix fois l'âge du fils ?

Soit x le nombre d'années cherché.

Dans x années l'âge du père sera $32+x$ et celui du fils $5+x$.

On a l'équation

$$32+x=10\,(5+x),$$

d'où $x=-2$.

« Dans —2 ans » signifie « il y a deux ans ». Quand nous avons posé l'équation, nous n'avons pas pensé au fait que *dans l'avenir*, l'âge du père ne sera jamais égal à 10 fois l'âge du fils ; un tel rapport ne pouvait exister que *dans le passé*. L'équation se trouva être plus réfléchie que nous et nous a indiqué notre erreur.

Quelques cas curieux

En résolvant des équations, nous trouvons parfois des réponses qui peuvent mettre en échec un homme peu versé dans les mathématiques. En voici quelques exemples :

I. Trouver un nombre de deux chiffres possédant des propriétés suivantes : le chiffre des di-

zaines est inférieur de 4 à celui des unités. Si d'un nombre formé des mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse on retranche le nombre cherché, on obtient 27.

Désignons le chiffre des dizaines par x et celui des unités par y. Nous pouvons facilement établir un système d'équations pour ce problème :

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

Portons la valeur de x donnée par la première équation dans la seconde, il vient :

$$10y + y - 4 - [10(y - 4) + y] = 27,$$

soit tous calculs faits :

$$36 = 27.$$

Nous n'avons pas déterminé les valeurs des inconnues mais nous avons appris que $36 = 27$.

Qu'est-ce que cela signifie ?

Cela veut dire tout simplement qu'il n'existe pas de nombre à deux chiffres satisfaisant aux conditions posées, et que les équations posées se contredisent. En effet, en multipliant les deux membres de la première équation par 9 on trouve :

$$9y - 9x = 36$$

et de la seconde équation, en simplifiant, on tire :

$$9y - 9x = 27.$$

Une même grandeur, $9y - 9x$, est égale à 36 selon la première équation et à 27 selon la seconde, ce qui est impossible puisque $36 \neq 27$.

Le même échec attend celui qui voudra résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$$

En divisant la première équation par la seconde on obtient :

$$xy=2.$$

En écrivant l'équation obtenue à côté de la seconde équation on a

$$\begin{cases} xy=4, \\ xy=2, \end{cases}$$

c'est-à-dire $4=2$.

Il n'y a donc pas de chiffres qui satisfont ce système d'équations.

(Les systèmes analogues à ceux que nous venons de considérer et qui n'ont pas de solution sont dits incompatibles.)

II. Nous rencontrons un autre résultat inattendu si nous changeons quelque peu l'énoncé du problème précédent. Supposons, toutes choses égales d'ailleurs, que le chiffre des dizaines est inférieur à celui des unités non de 4, mais de 3. Quel est ce nombre ?

Posons l'équation. Si nous désignons le chiffre des dizaines par x, le chiffre des unités sera égal à $x+3$. En traduisant le problème en langage algébrique on obtient :

$$10(x+3)+x-[10x+(x+3)]=27.$$

En simplifiant, on obtient l'égalité

$$27=27.$$

Cette égalité est indiscutablement juste, mais elle ne dit rien sur la valeur de x. Est-ce que cela veut dire qu'il n'existe pas de nombres satisfaisant à ces conditions ?

Bien au contraire, cela indique que l'équation posée est une identité, c'est-à-dire qu'elle est juste pour toutes les valeurs de l'inconnue x.

Il est facile de se convaincre que tout nombre à deux chiffres dont le chiffre des unités est supérieur de 3 à celui des dizaines, possède la propriété indiquée :

$$14+27=41 \qquad 47+27=74$$
$$25+27=52 \qquad 58+27=85$$
$$36+27=63 \qquad 69+27=96.$$

III. Trouver un nombre à trois chiffres possédant les propriétés suivantes :

1) le chiffre des dizaines est égal à 7 ;

2) le chiffre des centaines est inférieur de 4 à celui des unités ;

3) si on inverse l'ordre des chiffres, le nombre obtenu sera supérieur de 396 au nombre cherché.

Posons l'équation en désignant par x le chiffre des unités :

$$100x+70+x-4-[100(x-4)+70+x]=396.$$

Après simplification, cette équation nous donne l'identité

$$396=396.$$

Nos lecteurs savent déjà comment il faut interpréter un tel résultat. Il signifie que tout nombre de trois chiffres dont le premier est inférieur de 4 au troisième * augmente de 396 si l'on dispose les chiffres dans l'ordre inverse.

Jusqu'à présent, nous avons considéré des problèmes à caractère plus ou moins artificiel ; ils étaient destinés à habituer le lecteur à poser et à resoudre des équations. Maintenant que nous sommes armés au point de vue théorique, nous allons aborder quelques problèmes pratiques.

---

* Le chiffre des dizaines n'y joue aucun rôle.

Dans un salon de coiffure

Problème

Est-ce qu'un coiffeur peut avoir besoin de l'algèbre ? On va voir que cela arrive. Un jour, alors que j'étais chez le coiffeur, celui-ci me demanda de résoudre le problème suivant :

« Nous avons deux solutions d'eau oxygénée : à 30% et à 3%. Il nous faut les mélanger de façon à obtenir une solution à 12%, mais nous n'arrivons pas à trouver la proportion exacte... », me dit-il.

Il m'a donné un morceau de papier, et la proportion requise a été trouvée. Ce n'était pas bien difficile.

Solution

On peut résoudre ce problème par la méthode arithmétique, mais l'algèbre mène au but de façon plus rapide et plus simple. Pour avoir une solution à 12%, il faut prendre x grammes de la solution à 3%, et y grammes de la solution à 30%. On aura alors dans la première portion $0{,}03x$ grammes d'eau oxygénée pure, dans la seconde portion $0{,}3y$, et en tout :

$$0{,}03x+0{,}3y.$$

On obtient $(x+y)$ grammes d'une solution qui doit contenir $0{,}12\ (x+y)$ grammes d'eau oxygénée pure.

Nous avons l'équation :

$$0{,}03x+0{,}03y=0{,}12\,(x+y).$$

Elle donne $x=2y$, c'est-à-dire qu'il faut prendre deux fois plus d'eau oxygénée à 3% que d'eau à 30%.

Le tramway et le piéton

Problème

Alors que je suivais les rails du tramway, je remarquai qu'un tram me dépassait toutes les 12 minutes, et que toutes les 4 minutes j'en croisais un. Moi et les tramways, nous nous déplacions à une vitesse uniforme.

A quels intervalles les tramways quittaient-ils leurs terminus ?

Solution

Si les tramways quittent leurs terminus toutes les x minutes, cela signifie qu'à l'endroit où l'un d'eux m'a dépassé, un autre tramway arrivera x minutes plus tard. Quand ce dernier me dépassera à son tour, il aura parcouru en $12-x$ minutes le chemin que j'aurai parcouru moi-même en 12 minutes. Cela signifie que le tramway fait en $\frac{12-x}{12}$ minutes le chemin que je fais en 1 minute.

Dans l'autre sens, un tramway me croisera 4 minutes après le précédent ; durant les $(x-4)$ minutes qui restent, il fera le chemin que je parcours en 4 minutes. Il en résulte que le chemin que je fais en 1 minute est parcouru par le tram en $\frac{x-4}{4}$ minutes.

Nous avons donc l'équation

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x-4}{4},$$

d'où $x=6$. Les tramways partent de leurs terminus toutes les 6 minutes.

On peut également proposer la solution suivante qui est réellement une solution arithmé-

tique. Désignons par a la distance entre deux trams qui se suivent. La distance entre moi et celui qui vient à ma rencontre diminue alors de $\frac{a}{4}$ par minute (puisqu'en 4 minutes nous parcourons ensemble la distance a entre le tramway qui vient de passer et le suivant). Pour celui qui vient derrière moi, la distance entre nous diminue chaque minute de $\frac{a}{12}$. Supposons maintenant que j'aie avancé pendant une minute, puis reculé pendant une minute également, revenant ainsi au même endroit. Pendant la première minute, la distance entre moi et le tram qui vient à ma rencontre a alors diminué de $\frac{a}{4}$, et pendant la seconde minute, cette distance a diminué de $\frac{a}{12}$. En deux minutes, la distance entre nous a donc diminué de $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}=\frac{a}{3}$.

Le résultat aurait été le même si j'étais resté sur place, puisqu'au total, je me suis retrouvé au même endroit. Par suite, si j'étais resté sur place pendant une minute (et non pendant deux), le tramway se serait rapproché de moi de $\frac{a}{3}:2=\frac{a}{6}$, et il aurait parcouru toute la distance a en 6 minutes. Cela montre que les tramways passent devant un observateur immobile à des intervalles de 6 minutes.

Le vapeur et le radeau

Problème

Un vapeur a mis 5 heures pour aller sans s'arrêter d'une ville A à une ville B située en aval du fleuve. Au retour, le vapeur a mis 7

heures pour remonter le courant, également sans s'arrêter et en gardant la même vitesse propre. Combien de temps mettra un radeau pour aller de A à B, sachant qu'il se déplace avec la vitesse du courant ?

Solution

Désignons par x le temps (en heures) nécessaire pour que le vapeur parcoure la distance de A à B en l'absence de courant (c'est-à-dire avec sa vitesse propre), et par y le temps que met un radeau pour parcourir la même distance. En une heure le vapeur franchit $\frac{1}{x}$ de la distance AB, et le radeau $\frac{1}{y}$. Par suite, le vapeur fait à l'heure $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ de la distance AB en descendant le courant et $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ en le remontant. Or on sait qu'en descendant le courant le vapeur fait à l'heure $\frac{1}{5}$ de la distance AB, et en le remontant, $\frac{1}{7}$ de cette distance. Nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Notons que pour résoudre ce système, il n'est pas nécessaire de chasser les dénominateurs ; il suffit de soustraire la seconde équation de la première, et on obtient :

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35},$$

d'où $y=35$. Un radeau met 35 heures pour aller de A à B.

Les deux boîtes de café

Problème

Deux boîtes remplies de café ont la même forme et sont faites du même fer-blanc. La première pèse 2 kg, et sa hauteur est de 12 cm ; la seconde a 9,5 cm de hauteur et pèse 1 kg. Quel est le poids net du café dans chaque boîte ?

Solution

Désignons par x le poids du contenu de la grande boîte et par y celui du contenu de la petite. Soit respectivement z et t les poids des deux boîtes. Nous avons les équations

$$\begin{cases} x+z=2, \\ y+t=1. \end{cases}$$

Puisque les poids du contenu des boîtes pleines sont dans le même rapport que les *volumes*, c'est-à-dire les cubes des hauteurs de celles-ci*, on a :

$$\frac{x}{y}=\frac{12^3}{9{,}5^3}\approx 2{,}02 \quad \text{ou} \quad x=2{,}02y.$$

Les poids des boîtes vides sont entre eux comme leurs *surfaces* totales, c'est-à-dire comme les carrés de leurs hauteurs respectives.

---

* Il n'est permis de se servir de cette proportion que lorsque les parois des boîtes ne sont pas trop épaisses (car les surfaces extérieure et intérieure des boîtes, strictement parlant, ne sont pas semblables, et de plus, la hauteur de la partie intérieure de la boîte diffère de celle de la boîte même).

On a donc :

$$\frac{z}{t}=\frac{12^2}{9,5^2}\approx 1,60 \quad \text{ou} \quad z=1,60t.$$

En portant les valeurs de x et de z dans la première équation, on obtient le système

$$\begin{cases} 2,02y+1,60t=2, \\ y+t=1. \end{cases}$$

En résolvant ce système on a :

$$y=\frac{20}{21}=0,95, \quad t=0,05.$$

Par suite

$$x=1,92, \quad z=0,08.$$

Poids du café contenu dans la grande boîte : 1,92 kg ; poids du café contenu dans la petite boîte : 0,94 kg.

Une soirée dansante

Problème

20 personnes assistaient à une soirée dansante. Marie a dansé avec sept jeunes gens, Olga avec huit, Véra avec neuf, et ainsi de suite jusqu'à Nina, qui a dansé avec tous les jeunes gens présents à la soirée. Combien de danseurs y avait-il ?

Solution

Ce problème est très facile à résoudre si l'on choisit convenablement l'inconnue. Cherchons donc le nombre de jeunes filles, que nous dé-

signerons par x :

la 1re, Marie,	a	dansé	avec	$6+1$	jeunes	gens,
la 2e, Olga,	»	»	»	$6+2$	»	»
la 3e, Véra,	»	»	»	$6+3$	»	»
. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
la xe, Nina,	»	»	»	$6+x$	»	»

Nous avons l'équation

$$x+(6+x)=20,$$

d'où

$$x=7,$$

et par suite, le nombre de danseurs était

$$20-7=13.$$

Une reconnaissance navale

Premier problème

Un contre-torpilleur qui naviguait avec l'escadre a reçu l'ordre de reconnaître un secteur long de 70 milles dans la direction du mouvement de l'escadre. La vitesse de cette dernière est de 15 milles à l'heure et celle du contre-torpilleur 28 milles. Trouvez dans combien de temps le contre-torpilleur reviendra à l'escadre.

Solution

Désignons par x le nombre d'heures cherché. Pendant ce temps l'escadre aurait fait $15\ x$ milles et le contre-torpilleur $28\ x$ milles. Le contre-torpilleur a fait 70 milles et une partie du chemin de retour, tandis que l'escadre a fait le reste de ce chemin. Ensemble, ils ont fait une route de $28x+15x$ égale à $2 \cdot 70$ milles. On a

l'équation :

$$28x+15x=140,$$

d'où $x=\frac{140}{43}=3$ heures $\frac{11}{43}$. Le contre-torpilleur reviendra à l'escadre dans 3 heures 15 minutes environ.

Second problème

Un contre-torpilleur a reçu l'ordre de faire une reconnaissance dans la direction du mouvement de l'escadre. Dans trois heures il devra rejoindre l'escadre. Au bout de combien de temps après avoir quitté l'escadre le contre-torpilleur devra-t-il rebrousser chemin, si sa vitesse est de 25 milles à l'heure et celle de l'escadre de 15 milles ?

Solution

Admettons que le contre-torpilleur doive rebrousser chemin dans x heures ; cela signifie qu'il s'éloignera de l'escadre pendant x heures, et reviendra à sa rencontre pendant $3-x$ heures. Quand tous les navires vont dans la même direction, le contre-torpilleur en x heures s'éloigne de l'escadre d'une distance égale à la différence des routes parcourues, soit :

$$25x-15x=10x.$$

Au retour, le contre-torpilleur parcourt une distance égale à $25(3-x)$ milles pendant que l'escadre parcourt $15(3-x)$ milles. Ensemble ils font $10x$ milles. Par suite

$$25(3-x)+15(3-x)=10x,$$

d'où

$$x = 2\frac{2}{5}.$$

Le contre-torpilleur doit rebrousser chemin 2 h 24 mn après avoir quitté l'escadre.

Au vélodrome

Problème

Deux cyclistes tournent à vitesse constante sur la piste circulaire du vélodrome. Quand ils se déplacent en sens contraire, ils croisent toutes les 10 secondes. Quand ils se déplacent dans le même sens, l'un atteint l'autre toutes les 170 secondes. Quelle est la vitesse de chaque cycliste si la longueur de la piste est de 170 m ?

Solution

Si x est la vitesse du premier cycliste, en 10 secondes il parcourt $10x$ mètres. Le second cycliste, roulant en sens contraire, parcourt d'une rencontre à l'autre le reste de la piste, c'est-à-dire une distance de $(170-10x)$ mètres. Si la vitesse du second coureur est égale à y, cette distance sera $10y$ mètres : on a alors

$$170-10x = 10y.$$

Lorsque les cyclistes vont dans le même sens, en 170 secondes le premier fait $170x$ mètres, et le second $170y$ mètres. Si le premier cycliste roule plus vite que le second il fait, entre deux rencontres, un tour de piste de plus que le second, c'est-à-dire que :

$$170x-170y = 170.$$

En simplifiant, on trouve

$$x+y=17, \quad x-y=1,$$

d'où $x=9$, $y=8$ (mètres par seconde).

Une compétition de motocyclistes

Problème

Lors d'une compétition, trois motocyclistes ont pris le départ simultanément. Le second motocycliste, qui faisait 15 km/h de moins que le premier et 3 km/h de plus que le troisième, a franchi la ligne d'arrivée 12 minutes plus tard que le premier et 3 minutes plus tôt que le troisième. Tous les trois ont roulé sans s'arrêter. On demande :

a) la longueur du parcours ;

b) la vitesse de chaque motocycliste ;

c) le temps mis par chaque motocycliste pour effectuer le parcours.

Solution

On a donc sept inconnues à trouver. Nous nous contenterons cependant d'en chercher deux : établissons un système de deux équations à deux inconnues.

Soit x la vitesse du deuxième motocycliste. La vitesse du premier sera alors $x+15$ et celle du troisième $x-3$.

Designons par y la distance à parcourir. La durée du parcours sera alors :

pour le premier motocycliste . . . $\frac{y}{x+15}$,

pour le deuxième . . . . $\frac{y}{x}$,

pour le troisième . . . . $\frac{y}{x-3}$.

On sait d'autre part que le deuxième a roulé 12 minutes ($\frac{1}{5}$ d'heure) de plus que le premier. Par suite :

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}.$$

Le troisième, lui, a roulé 3 minutes ($\frac{1}{20}$ d'heure) de plus que le deuxième. Par suite :

$$\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}.$$

Multiplions la seconde équation par 4 et retranchons-la de la première

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}-4\left(\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}\right)=0.$$

Divisons tous les termes de cette équation par y (nous savons que sa valeur diffère de zéro), et chassons les dénominateurs. Nous obtenons :

$$(x+15)(x-3)-x(x-3)-4x(x+15)+$$
$$+4(x+15)(x-3)=0.$$

En simplifiant, il vient :

$$3x-225=0,$$

d'où

$$x=75.$$

Connaissant x, on tire de la première équation la valeur de y

$$\frac{y}{75}-\frac{y}{90}=\frac{1}{5},$$

d'où

$$y=90.$$

Ainsi, les vitesses de motocyclistes étaient respectivement 90, 75 et 72 km/h.

La longueur du parcours était de 90 km.

En divisant cette longueur par la vitesse de chaque motocycliste on trouve leurs temps respectifs :

pour le premier . . . 1 heure,
pour le deuxième . . 1 heure 12 minutes,
pour le troisième . . . 1 heure 15 minutes.

Ainsi, toutes les inconnues sont trouvées.

La vitesse moyenne d'une automobile

Problème

Une auto a parcouru la distance qui sépare deux villes à la vitesse de 60 kilomètres à l'heure, et elle est revenue au point de départ à la vitesse de 40 kilomètres à l'heure. Quelle était sa vitesse moyenne ?

Solution

La simplicité apparente du problème induit facilement en erreur. D'aucuns, sans réfléchir, calculeront la moyenne arithmétique de 60 et 40, c'est-à-dire :

$$\frac{60+40}{2}=50.$$

Cette « simple » solution serait juste si l'aller et le retour duraient le même temps. Mais il est clair que le retour a demandé plus de temps que l'aller. En tenant compte de cela, on comprend que la réponse « 50 » n'est pas exacte.

En effet, l'algèbre nous fournit une autre réponse. Il n'est pas difficile de poser l'équation si l'on introduit une inconnue auxiliaire, en l'occurrence la distance l entre les deux villes. Désignons la vitesse moyenne cherchée par x et

posons l'équation

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{60}+\frac{l}{40}.$$

Puisque la distance l n'est pas nulle, on peut diviser l'équation par l ; on obtient :

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{60}+\frac{1}{40}$$

d'où

$$x=\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}=48.$$

On voit ainsi que la réponse exacte est 48 km/h, et non 50.

Si l'on résout le même problème en se servant de lettres (l'auto a fait le voyage aller à la vitesse de a kilomètres à l'heure et le voyage retour à la vitesse de b kilomètres à l'heure) on obtient l'équation

$$\frac{2l}{x}=\frac{l}{a}+\frac{l}{b},$$

d'où on tire la valeur de x égale à

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Cette valeur est appelée *moyenne harmonique* des valeurs a et b.

Ainsi, la vitesse moyenne de marche s'exprime non par la moyenne arithmétique mais par la moyenne harmonique des vitesses. Pour a et b positifs la moyenne harmonique est toujours *inférieure* à leur moyenne arithmétique

$$\frac{a+b}{2},$$

c'est ce que nous avons vu dans l'exemple cité (48 est inférieur à 50).

Machines mathématiques

En parlant d'équations, on ne peut passer sous silence leur résolution à l'aide des calculatrices. Nous avons déjà dit que les machines à calculer peuvent « jouer » aux échecs. Elles peuvent également résoudre d'autres problèmes, par exemple, traduire d'une langue en une autre, orchestrer une partition, etc. Il s'agit seulement d'établir un « programme » approprié, suivant lequel la machine fonctionnera.

Nous ne nous occuperons pas ici des « programmes » d'échecs ou de traductions, car ils sont extrêmement compliqués. Nous allons étudier seulement deux « programmes » très simples. Mais il nous faut d'abord dire quelques mots sur l'agencement d'une machine à calculer.

Au chapitre I, nous avons parlé des dispositifs qui permettent d'effectuer des milliers et même des dizaines de milliers d'opérations par seconde. La partie de la machine qui sert à effectuer directement les opérations (le plus souvent dans le système de numération binaire) est appelée *arithmomètre*. La machine comprend encore un mécanisme directeur (qui règle le fonctionnement de la machine entière, et une *mémoire*. La « mémoire » est un dépôt de chiffres et de signes convenus. Enfin, la machine est dotée de dispositifs spéciaux servant à introduire de nouvelles données et à livrer les résultats finaux. La machine imprime ceux-ci sur des fiches (dans le système décimal).

Tout le monde sait qu'on peut enregistrer des sons sur un disque ou sur une bande pour les reproduire ensuite. Mais les sons ne peuvent être enregistrés sur un disque qu'une seule fois ; pour un nouvel enregistrement il faut un nouveau

disque. Avec un magnétophone l'enregistrement se fait de manière un peu différente : par aimantation d'un ruban magnétique. On peut reproduire les sons un grand nombre de fois, puis « désaimanter » le ruban pour enregistrer à nouveau paroles ou musique. Sur le même ruban, on peut donc faire plusieurs enregistrements consécutifs, en « effaçant » chaque fois au préalable l'enregistrement précédent.

La « mémoire » est fondée sur le même principe. Les nombres et les signes convenus sont enregistrés (à l'aide de signaux électriques, magnétiques ou mécaniques) sur un tambour, un ruban ou tout autre dispositif. A l'instant requis le nombre enregistré peut être « lu », et si l'on n'en a plus besoin, on peut l'effacer et enregistrer à sa place un autre nombre. La « mémorisation » et la « lecture » d'un nombre ou d'un signe convenu ne durent que quelques millionièmes de seconde.

La « mémoire » peut contenir plusieurs milliers de *cellules*, dont chacune peut comprendre plusieurs dizaines d'éléments, par exemple d'éléments magnétiques. Pour l'enregistrement des nombres dans le système binaire, admettons que chaque élément aimanté représente le chiffre 1 et chaque élément non aimanté le chiffre 0. Admettons également que chaque cellule de la mémoire contient 25 éléments (ou, comme on dit, 25 « rangs binaires ») le premier élément de la cellule servant à désigner le *signe* du nombre (+ ou —), les 14 rangs suivants, à enregistrer la partie entière du nombre, et les 10 derniers rangs, la partie fractionnaire. La figure 8 représente schématiquement deux cellules de mémoire comprenant chacune 25 rangs. Les éléments aimantés sont marqués du signe + et

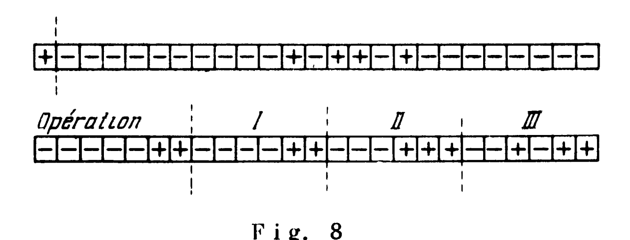


Fig. 8

les éléments non aimantés du signe —. Considérons la cellule supérieure (la virgule indique où commence la partie fractionnaire du nombre, et la ligne en pointillé sépare le premier rang qui indique le signe du nombre). Le nombre qui y est enregistré est + 1011,01 (dans le système binaire), c'est-à-dire 11,25 dans le système décimal.

Dans les cellules de la mémoire sont enregistrées, outre les nombres, les *instructions* dont se compose le programme. Voyons comment se présentent les instructions pour une calculatrice dite *à trois adresses.* Dans ce cas, lors de l'enregistrement de l'instruction, la cellule de mémoire est divisée en quatre parties (lignes en pointillé sur la cellule inférieure, fig. 8). La première partie sert à désigner l'opération qui est enregistrée dans la cellule sous forme de numéro. Par exemple,

addition: opération I
soustraction: opération II
multiplication: opération III, etc.

Les instructions sont déchiffrées de la façon suivante : première partie de la cellule : numéro de l'opération ; deuxième et troisième parties : numéros des cellules (*de l'adresse*) où il faut prendre les nombres pour effectuer cette

opération ; quatrième partie : numéro de la cellule (*l'adresse*) dans laquelle il faut envoyer le résultat obtenu. Par exemple, sur la figure 8 (ligne inférieure) on a enregistré les nombres binaires 11, 11, 111 et 1011, autrement dit les nombres décimaux 3, 3, 7 et 11, ce qui indique l'instruction suivante : exécuter l'opération III (c'est-à-dire une multiplication) avec les chiffres qui se trouvent dans la *troisième* et la *septième* cellules de la mémoire et « mémoriser » (c'est-à-dire enregistrer) le résultat obtenu dans la *onzième* cellule.

Par la suite, nous enregistrerons les nombres et les instructions non par des signes convenus, comme sur la figure 8, mais directement dans le système décimal. Par exemple, l'instruction présentée dans la ligne inférieure (fig. 8) sera enregistrée de la façon suivante :

multiplication 3 7 11

Considérons maintenant deux exemples simples de programmes.

Programme 1

1) addition	4	5	4
2) multiplication	4	4	→
3) transmission de la commande			1
4) 0			
5) 1			

Voyons maintenant comment fonctionnera la calculatrice dans les cinq premières cellules de laquelle ces données sont inscrites.

1re *instruction* : additionner les nombres enregistrés dans la 4e et la 5e cellules et envoyer le résultat de nouveau dans la 4e cellule (à la place de ce qui était enregistré). De cette

façon, la machine enregistrera dans la 4e cellule le nombre $0+1=1$. Après l'exécution de cette 1re instruction, les nombres suivants seront enregistrés dans la 4e et la 5e cellules :

4) 1,
5) 1.

2e instruction : multiplier le nombre qui est enregistré dans la 4e cellule par lui-même (c'est-à-dire l'élever au carré) et inscrire le résultat, soit 1^2, sur une fiche (la flèche signifie la livraison d'un résultat définitif).

3e instruction : *transmission de la commande* dans la première cellule. Autrement dit, l'instruction « transmission de la commande » signifie qu'il faut de nouveau exécuter toutes les instructions en commençant par la première. D'où à nouveau :

1re instruction : additionner les nombres qui se trouvent dans la 4e et la 5e cellules et enregistrer de nouveau le résultat dans la 4e cellule. On aura donc dans la 4e cellule le nombre $1+1=2$:

4) 2,
5) 1.

2e instruction : élever au carré le nombre qui se trouve dans la 4e cellule et inscrire le résultat obtenu, c'est-à-dire 2^2, sur une fiche (ce qui est indiqué, on l'a vu, par la flèche).

3e instruction : *transmission de la commande* dans la 1e cellule (passage à la 1re instruction).

1re instruction : envoyer le nombre $2+1=3$ dans la 4e cellule :

4) 3,
5) 1.

2ᵉ instruction : inscrire sur la fiche le nombre 3^2.

3ᵉ instruction : transmission de la commande dans la 1ʳᵉ cellule, etc.

Nous voyons ainsi que la machine calcule *les carrés des nombres entiers*, l'un après l'autre, et les inscrit sur une fiche. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de composer à chaque fois le nouveau nombre à la main : la machine choisit elle-même les nombres entiers l'un après l'autre et les élève au carré. En agissant suivant ce programme, la machine calculera les carrés de tous les nombres entiers de 1 à 10 000 en quelques dizaines de secondes.

Il est à noter qu'en réalité, le programme pour le calcul des carrés des nombres entiers est un peu plus compliqué. Cela concerne avant tout la 2ᵉ instruction. En effet, l'inscription du résultat final sur une fiche demande beaucoup plus de temps que l'exécution d'une opération par la machine. Pour cette raison, les résultats sont d'abord « retenus » dans les cellules libres de la « mémoire » et plus tard (« sans hâte ») inscrits sur la fiche. Ainsi, le premier résultat doit être « retenu » dans la 1ʳᵉ cellule libre de la « mémoire », le deuxième résultat dans la 2ᵉ cellule libre, le troisième dans la troisième cellule, etc. Dans le programme simplifié indiqué plus haut, on n'en a pas tenu compte.

En outre, la machine ne peut pas s'occuper longtemps du calcul des carrés, car le nombre des cellules de la mémoire n'y suffirait pas. D'autre part, il est impossible de deviner quand la machine aura déjà calculé le nombre de carrés voulu, puisqu'elle fait des milliers d'opérations par seconde. Aussi a-t-on prévu des instructions spéciales pour arrêter la machine à un instant

donné. Par exemple, le programme peut être établi de telle façon que la machine calcule les carrés de tous les nombres entiers de 1 à 10 000 et s'arrête automatiquement.

Il existe d'autres sortes d'instructions plus compliquées sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Voici comment se présente, de façon plus détaillée, le programme pour le calcul des carrés de tous les nombres entiers de 1 à 10 000.

Programme 1a

1) addition	8	9	8
2) multiplication	8	8	10
3) addition	2	6	2
4) transmission conditionnelle de la commande	8	7	1
5) stop			
6)	0	0	1
7) 10 000			
8) 0			
9) 1			
10) 0			
11) 0			
12) 0			

. . . .

Les deux premières instructions diffèrent peu de celles qui figuraient dans le programme simplifié précédent. Après l'exécution de ces deux instructions les nombres suivants figureront dans les 8ᵉ, 9ᵉ et 10ᵉ cellules :

8) 1
9) 1
10) 1^2

La troisième instruction est très intéressante : il faut additionner les chiffres de la 2ᵉ et la 6ᵉ cellules et de nouveau enregistrer

les résultats dans la 2e cellule, après quoi celle-ci aura la forme

2) multiplication 8 8 11.

Comme on le voit après l'exécution de la troisième instruction, la *deuxième instruction est modifiée*, ou plutôt l'une des *adresses* de la 2e instruction. Nous en indiquerons les raisons plus bas.

Quatrième instruction: transmission *conditionnelle* de la commande (au lieu de la 3e instruction dans le programme considéré plus haut). Cette instruction est exécutée de la façon suivante : si le nombre qui se trouve dans la 8e cellule est *inférieur* à celui de la 7e cellule, la commande est transmise à la 1re cellule ; sinon, c'est l'instruction suivante (la 5e) qui est exécutée.

Dans le cas considéré, on a $1 < 10\,000$ de sorte que la commande est transmise à la 1re cellule. On a donc de nouveau la 1re instruction.

Après l'exécution de la 1re instruction, dans la 8e cellule se trouve le nombre 2.

La deuxième instruction qui maintenant est de la forme

2) multiplication 8 8 11,

consiste en ce que le nombre 2^2 est dirigé sur la 11e cellule. On comprend alors pourquoi la 3e instruction a été exécutée : le nouveau nombre, 2^2, doit arriver non à la 10e cellule, qui est déjà occupée, mais dans la cellule suivante.

Après l'exécution de la 1re et de la 2e instructions nous aurons les nombres suivants :

8) 2
9) 1
10) 1^2
11) 2^2

Après l'exécution de la 3e instruction, la 2e cellule prendra la forme

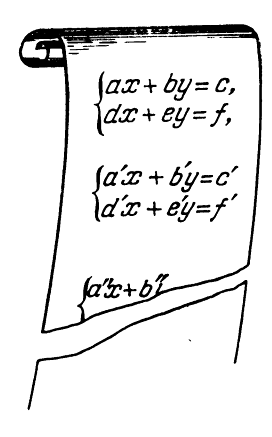
2) multiplication 8 8 12.

Puisque dans la 8e cellule se trouve toujours un nombre inférieur à celui de la 9e cellule, la 4e instruction signifie de nouveau la transmission de la commande vers la 1re cellule.

Maintenant, après l'exécution de la 1re et la 2e instructions, nous aurons:

8) 3
9) 1
10) 1^2
11) 2^2
12) 3^2

Jusqu'à quand la machine calculera-t-elle des carrés selon ce programme ? Jusqu'au moment où dans la 8e cellule apparaîtra le nombre 10 000, c'est-à-dire tant que les carrés des nombres entiers de 1 à 10 000 n'auront pas été calculés. A ce



moment, la quatrième instruction ne transmettra pas la commande à la 1re cellule (puisque dans la 8e cellule se trouvera un nombre non pas *inférieur* mais égal au nombre se trouvant dans la 7e cellule) ; autrement dit, après la 4e instruction la machine exécutera la 5e instruction : stop (débranchement).

Considérons maintenant un programme plus compliqué, par exemple, la solution d'un système d'équations. Nous présenterons ce programme sous une forme simplifiée. Le lecteur que cela intéresse pourra essayer lui-même de voir comment se présente ce programme plus développé.

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Ce système n'est pas difficile à résoudre :

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Pour calculer cette solution (avec des valeurs numériques données pour les coefficients a, b, c, d, e, f,) vous aurez probablement besoin de quelques dizaines de secondes. Mais la machine peut résoudre des *centaines* de ces systèmes en une seconde.

Considérons le programme correspondant. Admettons que plusieurs systèmes aient été donnés simultanément avec des valeurs numériques pour les coefficients $a, b, c, d, e, f, a', b', \ldots$

Voici le programme correspondant :

Programme 2

1) ×28	30	20	14) +3	19	3	27)	*b*
2) ×27	31	21	15) +4	19	4	28)	*c*
3) ×26	30	22	16) +5	19	5	29)	*d*
4) ×27	29	23	17) +6	19	6	30)	*e*
5) ×26	31	24	18) transmission de commande		1	31)	*f*
6) ×28	29	25	19) 6	6	0	32)	*a′*
7) —20	21	20	20) 0			33)	*b′*
8) —22	23	21	21) 0			34)	*c′*
9) —24	25	22	22) 0			35)	*d′*
10) : 20	21	→	23) 0			36)	*e′*
11) : 22	21	→	24) 0			37)	*f′*
12) +1	19	1	25) 0			38)	*a″*
13) +2	19	2	26) *a*			. . . .	

1re instruction: établir le produit des chiffres qui se trouvent dans la 28e et la 30e cellules et envoyer le résultat dans la 20e cellule. Autrement dit, dans la 20e cellule sera enregistré le nombre *ce*.

Les instructions 2 à 6 sont exécutées de façon analogue. Après l'exécution de celles-ci les nombres suivants se trouveront dans les cellules 20 à 25:

20) *ce*
21) *bf*
22) *ae*
23) *bd*
24) *af*
25) *cd*

7e instruction: retrancher du nombre qui se trouve dans la 20e cellule le nombre contenu dans la 21e cellule et enregistrer de nouveau le résultat (soit *ce*—*bf*) dans la 20e cellule.

Les 8e et 9e instructions sont exécutées de manière analogue. On aura alors dans les cellules 20, 21 et 22 les nombres suvants :

20) $ce - bf$
21) $ae - bd$
22) $af - cd$

10e et 11e instructions : les quotients

$$\frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{et} \quad \frac{af - cd}{ae - bd}$$

sont établis et inscrits sur une fiche (c'est-à-dire livrés comme résultats définitifs). Ce sont les valeurs des inconnues du premier système d'équations.

Le premier système est donc résolu. A quoi servent alors les instructions suivantes (cellules 12 à 19) ? Elles obligent la machine à « aborder » le deuxième système d'équations. Voyons comment cela se passe.

Les instructions 10 à 17 consistent en ceci : au contenu des cellules 1 à 6 s'ajoute l'inscription qui figure dans la 19e cellule et les résultats restent de nouveau dans les cellules 1 à 6. De cette façon, après l'exécution de la 17e instruction, les six premières cellules se présenteront ainsi :

1)	×34	36	20
2)	×33	37	21
3)	×32	36	22
4)	×33	35	23
5)	×32	37	24
6)	×34	35	25

18e instruction : transmission de la commande à la première cellule.

En quoi les nouvelles inscriptions dans les 6 premières cellules diffèrent-elles des inscriptions

précédentes ? En ce que les deux premières adresses dans ces cellules ont des numéros qui vont non pas de 26 à 31, comme auparavant, mais de 32 à 37. Autrement dit, la machine exécutera de nouveau les mêmes opérations, mais en prenant les nombres dans les cellules 32 à 37 où se trouvent les coefficients du deuxième système d'équations. La machine résoudra ainsi le deuxième système d'équations. Puis, elle passera au troisième système, etc.

Il résulte de tout ce que nous venons de dire que l'établissement d'un « programme » exact est d'une grande importance. La machine ne sait rien faire « par elle-même ». Elle ne peut qu'exécuter le programme qui lui a été imposé. Il existe des programmes pour le calcul des racines, des logarithmes, des sinus, pour la solution des équations de degrés supérieurs, etc. Nous avons déjà indiqué plus haut qu'il existe des programmes pour jouer aux échecs, pour traduire d'une langue en une autre... Evidemment, plus la tâche est difficile, plus le programme correspondant est compliqué.

Disons pour conclure qu'il existe également des *programmes de programmation*, à l'aide desquels la machine elle-même peut établir le programme nécessaire pour résoudre tel ou tel problème. Cela facilite l'établissement du programme, qui demande souvent beaucoup de travail.

CHAPITRE III

AU SECOURS DE L'ARITHMÉTIQUE

Très souvent l'arithmétique n'est pas capable par ses propres moyens de démontrer rigoureusement l'exactitude de certaines de ses affirmations. Dans ces cas elle est obligée de recourir aux méthodes générales de l'algèbre. Parmi les règles arithmétiques qui sont démontrées par l'algèbre on peut citer de nombreuses règles sur les opérations abrégées, certaines particularités intéressantes des nombres, les caractères de divisibilité, etc. Nous allons examiner ici quelques-unes de ces questions.

Multiplication instantanée

Dans de nombreux cas, le calculateur virtuose se facilite la besogne à l'aide de transformations algébriques peu compliquées. Par exemple, le calcul de

$$988^2$$

s'effectue de la façon suivante :

$$988 \cdot 988 = (988 + 12) \cdot (988 - 12) + 12^2 =$$
$$= 1000 \cdot 976 + 144 = 976\ 144.$$

Il est facile de voir que dans ce cas le calculateur se sert de la transformation algébrique suivante :

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)\ (a - b) + b^2.$$

En pratique, on peut utiliser cette formule pour le calcul oral.

Par exemple :

$$27^2 = (27+3)(27-3)+3^2 = 729, \quad 37^2 = 40 \cdot 34 + 3^2 = 1369,$$
$$63^2 = 66 \cdot 60 + 3^2 = 3969, \quad 48^2 = 50 \cdot 46 + 2^2 = 2304,$$
$$18^2 = 20 \cdot 16 + 2^2 = 324, \quad 54^2 = 58 \cdot 50 + 4^2 = 2916.$$

Autre exemple : la multiplication $986 \cdot 997$; on opère de la manière suivante :

$$986 \cdot 997 = (986-3) \cdot 1000 + 3 \cdot 14 = 983\,042.$$

Sur quoi est fondée cette méthode ? Représentons les facteurs sous la forme

$$(1000-14) \cdot (1000-3)$$

et multiplions ces deux binômes selon les règles de l'algèbre :

$$1000 \cdot 1000 - 1000 \cdot 14 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3.$$

Faisons les transformations :

$$1000\,(1000-14) - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 =$$
$$= 1000 \cdot 986 - 1000 \cdot 3 + 14 \cdot 3 = 1000\,(986-3) + 14 \cdot 3.$$

La dernière ligne nous fait voir la méthode utilisée par le calculateur.

Un cas intéressant est celui de la multiplication de deux nombres de trois chiffres, où les chiffres des dizaines sont identiques et où la somme des chiffres des unités est égale à 10. Par exemple, la multiplication

$$783 \cdot 787$$

s'effectue ainsi :

$$78 \cdot 79 = 6162 \,; \quad 3 \cdot 7 = 21 \,;$$

le résultat est

$$616\,221.$$

La méthode utilisée ressort clairement des transformations suivantes :

$$(780+3)(780+7)=$$
$$=780\cdot780+780\cdot3+780\cdot7+3\cdot7=$$
$$=780\cdot780+780\cdot10+3\cdot7=$$
$$=780(780+10)+3\cdot7=780\cdot790+21=$$
$$=616\,200+21.$$

Il existe, pour des multiplications de ce genre, une autre méthode encore plus simple :

$$783\cdot787=(785-2)(785+2)=785^2-4=$$
$$=616\,225-4=616\,221.$$

Dans cet exemple, nous avions à élever au carré le nombre 785.

Pour élever rapidement au carré des nombres qui se terminent par 5, la méthode suivante est très commode :

35^2 ; $3\cdot4=12$. Réponse : 1 225
65^2 ; $6\cdot7=42$. Réponse : 4 225
75^2 ; $7\cdot8=56$. Réponse : 5 625

La règle consiste à multiplier le chiffre des dizaines par le chiffre immédiatement supérieur, puis à écrire à droite du produit le nombre 25.

Voici sur quoi est fondée cette méthode. Si a désigne le chiffre des dizaines, on peut représenter le nombre entier sous la forme :

$$10a+5.$$

Le carré de ce nombre n'est autre que le carré d'un binôme, soit

$$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

L'expression $a(a+1)$ est le produit du chiffre des dizaines par le chiffre immédiatement supérieur. Enfin, multiplier un nombre par cent et

ajouter 25 est la même chose qu'*écrire* 25 à droite de ce nombre.

On en déduit une méthode simple pour élever au carré les nombres formés d'un nombre entier et de $\frac{1}{2}$. Par exemple :

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25 = 12\frac{1}{4},$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4},$$
$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

Les chiffres 1, 5 et 6

Tout le monde sait probablement que lorsqu'on multiplie une suite de nombres qui se terminent par une unité ou par un 5, on obtient un nombre qui se termine respectivement par le même chiffre. On sait moins que cela est vrai également pour le chiffre 6. Ainsi, toute puissance d'un nombre qui se termine par un 6 se termine également par un 6. Par exemple :

$$46^2 = 2\,116\ ; \quad 46^3 = 97\,336.$$

Cette particularité intéressante des chiffres 1, 5 et 6 peut être démontrée par l'algèbre. Considérons-la pour le chiffre 6.

Les nombres qui se terminent par un 6 sont représentés ainsi :

$$10a + 6; \quad 10b + 6, \quad \text{etc.}$$

où a et b sont des nombres entiers.

Le produit de deux de ces nombres est égal à

$$100ab + 60b + 60a + 36 = 10\,(10ab + 6b + 6a) + 30 + 6 =$$
$$= 10\,(10ab + 6b + 6a + 3) + 6.$$

Comme on le voit, le produit comprend un certain nombre de dizaines, plus le chiffre 6 qui, évidemment, doit se trouver à la fin.

La même démonstration peut être appliquée aux chiffres 1 et 5.

Cela nous permet d'affirmer, par exemple, que

386^{2567}	se termine par	6
815^{723}	»	5
491^{1732}	»	1, etc.

Les nombres 25 et 76

Il existe des nombres à deux chiffres qui possèdent les mêmes propriétés que les chiffres 1, 5 et 6. C'est le nombre 25 et, aussi étonnant que cela paraisse, le nombre 76. Le produit de deux nombres qui se terminent par 76 se termine également par 76.

Nous allons le démontrer. L'expression générale de ces nombres est :

$$100a + 76, \quad 100b + 76, \quad \text{etc.}$$

Multiplions deux nombres de ce genre ; nous obtenons

$$10\,000ab + 7\,600b + 7\,600a + 5\,776 = 10\,000ab + 7\,600b +$$
$$+ 7\,600a + 5\,700 + 76 = 100\,(100ab + 76b + 76a + 57) + 76;$$

ce qui démontre notre proposition : le produit se terminera par le nombre 76.

Il en résulte que toute *puissance* d'un nombre qui se termine par 76 est un nombre analogue:

$$376^2 = 141\,376, \quad 576^3 = 191\,102\,976, \text{ etc.}$$

« Nombres » infinis

Il existe des groupes de chiffres plus longs qui, lorsqu'ils se trouvent à la fin d'un nombre,

se conservent dans les produits de celui-ci. Le nombre de ces groupes est, comme nous le montrerons, infiniment grand.

Nous connaissons des groupes de deux chiffres qui possèdent cette propriété : 25 et 76. Pour trouver des groupes à trois chiffres, il faut écrire à gauche des nombres 25 ou 76 un chiffre tel que le groupe de trois chiffres possède la même propriété.

Quel chiffre faut-il écrire à gauche de 76 ? Désignons-le par k. Le nombre de 3 chiffres cherché aura alors la forme :

$$100k+76.$$

L'expression générale d'un nombre terminé par ce groupe de chiffres est :

$$1\,000a+100k+76, \quad 1\,000b+100k+76, \quad \text{etc.}$$

Multiplions deux de ces nombres ; nous obtenons :

$$1\,000\,000ab+100\,000ak+100\,000bk+76\,000a+76\,000b+$$
$$+10\,000k^2+15\,200k+5\,776.$$

Tous les termes sauf les deux derniers se terminent par 3 zéros au moins. Pour cette raison, le produit se termine par $100k+76$ si la différence

$$15\,200k+5\,776-(100k+76)=15\,100k+5\,700=15\,000k+$$
$$+5\,000+100\,(k+7)$$

est divisible par 1 000. Ce qui entraîne nécessairement : $k=3$.

Ainsi le groupe de chiffres cherché est 376. Par suite, toute puissance du nombre 376 se termine par 376 ; par exemple :

$$376^2=141\,376.$$

Si nous voulons trouver maintenant un groupe de 4 chiffres qui possède la même propriété, il

nous faudra écrire un nouveau chiffre à gauche de 376. Soit l ce chiffre ; le problème est : pour quelle valeur de l le produit

$$(10\,000a + 1\,000l + 376)\,(10\,000b + 1\,000l + 376)$$

se termine par $1\,000l + 376$? Effectuons les multiplications et laissons de côté tous les termes qui se terminent par 4 zéros ou plus ; il reste les termes :

$$752\,000l + 141\,376.$$

Le produit se termine par $1\,000l + 376$ si la différence

$$\begin{aligned} 752\,000l + 141\,376 - (1\,000l + 376) &= \\ = 751\,000l + 141\,000 &= \\ = (750\,000l + 140\,000) + 1\,000\,(l + 1)& \end{aligned}$$

est divisible par 10 000. Ce qui entraîne nécessairement $l = 9$.

Le groupe de 4 chiffres cherché est donc 9 376.

Un raisonnement identique nous donnera le groupe de 5 chiffres 09 376. Puis nous trouvons les groupes 109 376, 7 109 376, etc.

On peut ainsi écrire indéfiniment des chiffres à gauche du nombre obtenu. Au total, nous aurons un « nombre » qui comprendra une infinité de chiffres :

. . . . 7 109 376.

On peut additionner et multiplier de tels « nombres » selon les règles habituelles. En effet, ils sont écrits *de droite à gauche*, or l'addition et la multiplication (en colonne) s'effectuent également de droite à gauche, de sorte qu'on peut calculer chaque chiffre de la somme ou du produit l'un après l'autre, en nombre aussi grand que l'on veut.

Il est intéressant de noter que le « nombre » infini que nous venons d'écrire satisfait, si étrange que cela puisse paraître, à l'équation

$$x^2 = x.$$

En effet, le carré de ce « nombre » infini se termine par 76, puisque chacun des facteurs se termine par 76 ; pour la même raison le carré du nombre écrit se termine par 376, puis par 9 376, etc. Autrement dit, en calculant l'un après l'autre les chiffres du nombre x^2, où $x = ...7\ 109\ 376$, nous allons obtenir exactement les mêmes chiffres que dans le nombre x ; on a donc bien $x^2 = x$.

Nous avons examiné les groupes de chiffres qui se terminent par 76 *. Si on applique un raisonnement analogue pour des groupes de chiffres qui se terminent par 5, nous obtiendrons le groupe de chiffres suivants :

5, 25, 625, 0625, 90 625, 890 625, 2 890 625, etc.

Nous pouvons écrire alors un autre « nombre » infini

.... 2 890 625

qui satisfait également à l'équation $x^2 = x$. On pourrait montrer que ce « nombre » infini est égal à

$$(((5^2)^2)^2)^2 \ldots$$

Le résultat intéressant que nous venons d'obtenir s'exprime de la façon suivante : l'équation

* Remarquons que le groupe 76 peut lui-même être trouvé par des raisonnements analogues à ceux que nous avons indiqués plus haut. Il suffit de résoudre ce problème : quel chiffre faut-il écrire à gauche du chiffre 6 pour que le groupe de 2 chiffres obtenu possède la propriété considérée ?

$x^2=x$ a (en plus des solutions ordinaires $x=0$ et $x=1$) 2 solutions « infinies » :

$$x = \dots 7\,109\,376 \quad \text{et} \quad x = \dots 2\,890\,625$$

et ne peut pas avoir d'autres solutions (dans le système de numération décimale).

Le supplément

Vieux problème populaire

Deux marchands possédaient en commun un troupeau de bœufs. Ils l'ont vendu et ont obtenu pour chaque bœuf autant de roubles qu'il y avait de bêtes. Avec cet argent, ils ont acheté un troupeau de moutons à 10 roubles le mouton, et l'agneau. Ils ont partagé le troupeau en deux parties égales : un des marchands a reçu un mouton de plus, et l'autre a pris l'agneau et reçu de son compagnon un supplément correspondant. Quelle était la valeur de ce supplément (supposé égal à un nombre entier de roubles) ?

Solution

Le problème ne peut pas être traduit en « langage algébrique », la mise en équations étant impossible. On est obligé de le résoudre par une méthode spéciale, en recourant pour ainsi dire à la pensée mathématique libre. Mais l'algèbre fournit quand même ici une aide appréciable à l'arithmétique.

Le prix du troupeau de moutons en roubles est un carré parfait, puisque le troupeau a été acheté avec l'argent obtenu après la vente de n bœufs à raison de n roubles par bœuf. Un des marchands a reçu un mouton de plus que l'autre ;

le nombre de moutons est donc un nombre impair ; il en résulte que le chiffre des dizaines dans le nombre n^2 est également impair. Quel est le chiffre des unités ?

On peut démontrer que si, dans un carré parfait, le chiffre des dizaines est impair, le chiffre des unités ne peut être égal qu'à 6.

En effet, le carré d'un nombre comprenant a dizaines et b unités, $(10a+b)^2$, est égal à

$$100a^2+20ab+b^2=(10a^2+2ab)\cdot 10+b^2.$$

Il y a dans ce nombre $10a^2+2ab$ dizaines, plus un certain nombre de dizaines compris dans b^2. Mais $10a^2+2ab$ est divisible par 2, c'est un nombre pair. Par suite, le nombre de dizaines comprises dans $(10a+b)^2$ sera impair seulement si le nombre b^2 contient un nombre impair de dizaines. Or b^2 est le carré du chiffre des unités, c'est-à-dire un des 10 nombres suivants :

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Parmi ces nombres, seuls 16 et 36 ont un nombre impair de *dizaines*. Comme tous les deux se terminent par 6, il en résulte que le carré parfait

$$100a^2+20ab+b^2$$

ne peut avoir un nombre impair de dizaines que s'il se termine par 6.

Il est facile maintenant de trouver la réponse au problème posé. Il est clair que l'agneau a été estimé 6 roubles. Donc, le marchand qui l'a pris a reçu 4 roubles de moins que l'autre. Pour que les parts soient égales, le possesseur de l'agneau a dû recevoir de son compagnon un supplément de 2 roubles.

Divisibilité par 11

L'algèbre facilite beaucoup la recherche des caractères de divisibilité sans faire la division. Les caractères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 sont connus. Nous allons déterminer le caractère de divisibilité par 11, qui est d'ailleurs très simple.

Soit un nombre N, et soit a son chiffre des unités, b son chiffre des dizaines, c son chiffre des centaines, etc.

$$N = a + 10b + 100c + 1000d + \ldots =$$
$$= a + 10\,(в + 10c + 100d + \ldots).$$

Retranchons du nombre N le nombre $11(b+$ $+10c+100d+\ldots)$ qui est un multiple de 11. La différence obtenue, égale, comme il est facile de le voir, à

$$a - b - 10\,(c + 10d + \ldots),$$

aura le même reste que le nombre N après division par 11. En ajoutant à cette différence le nombre $11(c+10d+\ldots)$, multiple de 11, nous obtenons le nombre

$$a - b + c + 10\,(d + \ldots)$$

qui a le même reste que le nombre N après division par 11. Retranchons de ce nombre le nombre $11(d+\ldots)$, multiple de 11, etc. Finalement, nous obtenons le nombre

$$a - b + c - d + \ldots = (a + c + \ldots) - (b + d + \ldots)$$

qui a le même reste que le nombre N après division par 11.

Par conséquent, pour savoir si un nombre est divisible par 11, il suffit de retrancher de la somme de tous les chiffres occupant une place impaire la somme de tous les chiffres occupant une

place paire ; si la différence est égale à 0 ou à un nombre (positif ou négatif) multiple de 11, le nombre vérifié sera aussi un multiple de 11; dans le cas contraire le nombre n'est pas divisible par 11.

Essayons par exemple le nombre 87 635 064 :

$$8+6+5+6=25,$$
$$7+3+0+4=14,$$
$$25-14=11.$$

Ce nombre est donc divisible par 11.

Il existe un autre caractère de divisibilité par 11, commode pour les nombres qui ne sont pas très longs. On divise le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite et on additionne ces tranches. Si la somme obtenue est divisible par 11, le nombre donné est lui aussi divisible par 11. Soit, par exemple, le nombre 528. Nous divisons ce nombre en tranches (5/28) et additionnons ces deux nombres :

$$5+28=33.$$

Puisque 33 est divisible par 11, le nombre 528 est un multiple de 11 :

$$528:11=48.$$

Nous allons démontrer ce caractère de divisibilité. Divisons un nombre N quelconque en tranches à partir de la droite. Nous obtenons alors des nombres à 2 chiffres (ou à un chiffre)* que nous désignerons (de droite à gauche) par a, b, c, etc., de sorte qu'on pourra écrire le nombre N sous la forme suivante :

$$N=a+100b+10\,000c+\ldots=a+100\,(b+100c+\ldots).$$

* Si le nombre N a un nombre impair de chiffres, la dernière tranche (à l'extrême gauche) sera à un seul chiffre. En outre, une tranche de la forme 03 devra être considérée comme un nombre à un seul chiffre 3.

Retranchons du nombre N le nombre $99(b+$ $+100c+...)$, multiple de 11. Le nombre obtenu

$$a+(b+100c+\ldots)=a+b+100\,(c+\ldots)$$

aura le même reste que le nombre N après division par 11. Retranchons de ce nombre le nombre $99\,(c+...)$, multiple de 11, etc. Nous constatons finalement que le nombre N, après division par 11, a le même reste que le nombre

$$a+b+c+\ldots$$

Le numéro de la voiture

Problème

En se promenant en ville, trois étudiants en mathématiques ont remarqué que le conducteur d'une voiture avait enfreint le code de la route. Aucun d'eux n'a retenu le numéro (à 4 chiffres) qui figurait sur la plaque minéralogique, mais puisque tous étaient des mathématiciens, chacun d'eux a retenu une particularité de ce nombre. Un des étudiants se rappela que ses deux premiers chiffres étaient identiques, l'autre que les deux derniers chiffres étaient également identiques. Enfin le troisième a affirmé que ce nombre de 4 chiffres était un carré parfait. Pouvait-on d'après ces données trouver le numéro de la voiture ?

Solution

Désignons le premier (et le deuxième) chiffre du nombre cherché par a, et par b le troisième (et le quatrième) chiffre. Le nombre est alors :

$$1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11\,(100a+b).$$

Ce nombre est divisible par 11 et par suite (étant un carré parfait) il est divisible également

par 11^2. Autrement dit, le nombre $100a+b$ est divisible par 11. En utilisant un des deux caractères de divisibilité par 11 indiqués plus haut, nous trouverons que le nombre $a+b$ est divisible par 11. Mais cela signifie que

$$a+b=11,$$

car chacun des chiffres a et b est inférieur à 10.

Le nombre étant un carré parfait, le dernier chiffre, b, ne peut avoir que les valeurs suivantes :

0, 1, 4, 5, 6, 9.

Le chiffre a, qui est égal à $11-b$, pourra donc avoir les valeurs suivantes :

11, 10, 7, 6, 5, 2.

Les deux premières ne conviennent évidemment pas, et il reste :

$$b=4, \qquad a=7;$$
$$b=5, \qquad a=6;$$
$$b=6, \qquad a=5;$$
$$b=9, \qquad a=2.$$

Nous voyons qu'il faut chercher le numéro de la voiture parmi les 4 nombres suivants :

7744, 6655, 5566, 2299.

Mais les trois derniers nombres ne sont pas des carrés parfaits : le nombre 6655 est divisible par 5 mais n'est pas divisible par 25 ; le nombre 5566 est divisible par 2 mais n'est pas divisible par 4 ; le nombre $2299=121\cdot 19$ n'est pas un carré. Il ne reste que le nombre $7744=88^2$, qui nous fournit la solution du problème.

Divisibilité par 19

Démontrer le caractère suivant de divisibilité par 19.

Un nombre n'est divisible par 19 que lorsque le nombre de ses dizaines, ajouté au double du nombre de ses unités, est un multiple de 19.

Solution

Tout nombre N peut être mis sous la forme

$$N = 10x + y$$

où x est le *nombre* (et non pas le *chiffre*) des dizaines et y le nombre des unités. Il nous faut montrer que N est un multiple de 19 quand

$$N' = x + 2y$$

est un multiple de 19. Pour cela, multiplions N' par 10 et retranchons N du produit ; nous obtenons :

$$10N' - N = 10\,(x + 2y) - (10x + y) = 19y.$$

On voit que si N' est un multiple de 19

$$N = 10N' - 19y$$

se divise également par 19 ; inversement, si N est divisible par 19, l'expression

$$10N' = N + 19y$$

est un multiple de 19 et alors N' est également divisible par 19.

Soit à déterminer si le nombre 47 045 881 est divisible par 19.

Appliquons le caractère de divisibilité :

```
 4704588 | 1
      +2
 ------------
   47045 | 90
    +18
 ------------
    4706 | 3
     +6
 ------------
     471 | 2
     +4
 ------------
      47 | 5
    +10
 ------------
       5 | 7
    +14
 ------------
      19.
```

Puisque 19 est divisible par 19, les nombres 57, 475, 4712, 47 063, 470 459, 4 704 590 et 47 045 881 sont des multiples de 19.

Ainsi, le nombre indiqué est divisible par 19.

Le théorème de Sophie Germain

Voici le problème proposé par la mathématicienne française Sophie Germain :

Démontrer que tout nombre de la forme a^4+4 est un nombre divisible (si a n'est égal à 1).

Solution

La démonstration résulte des transformations suivantes :

$$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=$$
$$=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2-2a)\,(a^2+2+2a).$$

Le nombre a^4+4 peut être représenté sous la forme d'un produit de deux facteurs dont

aucun n'est égal au nombre lui-même ni à l'unité * ; autrement dit, c'est un nombre divisible.

Nombres divisibles

Il existe une infinité de nombres premiers, c'est-à-dire de nombres entiers supérieurs à l'unité et qui ne sont divisibles par aucun autre nombre qu'eux-mêmes ou l'unité.

Autrement dit, la suite qui commence par les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... est infinie. En s'insérant entre les nombres divisibles, ils partagent la suite naturelle des nombres entiers en secteurs plus ou moins longs de nombres divisibles. Quelle peut être la longueur de ces secteurs ? Est-ce que, par exemple, 1000 nombres divisibles peuvent se suivre sans être interrompus par un nombre premier ?

On peut démontrer, bien que cela puisse paraître invraisemblable, qu'un secteur de nombres divisibles compris entre deux nombres premiers peut être de longueur illimitée.

Pour plus de commodité, nous allons nous servir du symbole $n\,!$ (factorielle n) qui désigne le produit de tous les nombres entiers de 1 à n inclus. Par exemple, $5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Nous allons démontrer que la suite

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [n+1)!+4]\ldots$$
$$\text{jusqu'à } [(n+1)!+n+1] \text{ inclus,}$$

comprend n nombres divisibles consécutifs.

Ces nombres se suivent immédiatement dans la suite naturelle des nombres, puisque chaque

---

* Parce que $a^2+2-2a=(a^2-2a+1)+1=(a-1)^2+$ $+1 \neq 1$, si $a \neq 1$.

nombre consécutif est supérieur au précédent d'une unité. Il reste à démontrer qu'ils sont tous divisibles.

Le premier nombre

$$(n+1)!+2=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot(n+1)+2$$

est pair car ses deux termes comprennent le facteur 2. Et tout nombre pair supérieur à 2 est un nombre divisible.

Le deuxième nombre

$$(n+1)!+3=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)+3$$

comprend deux termes dont chacun est un multiple de 3. Il s'ensuit que ce nombre est également un nombre divisible.

Le troisième nombre

$$(n+1)!+4=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)+4$$

est divisible par 4 car il se compose des termes qui sont des multiples de 4.

De la même façon nous déterminons que le nombre suivant

$$(n+1)!+5$$

est un multiple de 5, etc. Autrement dit, chaque nombre de notre suite contient un facteur qui diffère de l'unité et de lui-même ; par suite, ce nombre est un nombre divisible.

Si vous voulez écrire, par exemple, 5 nombres divisibles consécutifs, il suffit de remplacer dans la suite indiquée plus haut n par 5. Vous aurez la suite

722, 723, 724, 725, 726,

mais ce n'est pas la seule suite comprenant 5 nombres divisibles consécutifs. Il en existe d'autres, par exemple

62, 63, 64, 65, 66,

ou des nombres encore plus petits :

24, 25, 26, 27, 28.

Essayons, maintenant de résoudre le problème suivant :

Ecrire *dix* nombres divisibles consécutifs.

Solution

De ce que nous venons de dire, il découle que le premier des dix nombres cherchés peut être :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

La suite cherchée sera alors :

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804, etc.

Il existe cependant des suites de dix (et même de plus de 10) nombres divisibles consécutifs beaucoup plus petits. On peut indiquer comme exemple la suite de 13 nombres :

114, 115, 116, 117, etc. jusqu'à 126 inclus.

Nombre des nombres premiers

L'existence de suites de nombres *divisibles* consécutifs aussi longues qu'on veut peut amener un doute sur le fait que la suite des nombres *premiers* est infinie. Aussi n'est-il pas inutile d'en faire la preuve.

Cette démonstration a été donnée par Euclide et fait partie de ses « Eléments ». C'est un raisonnement par l'absurde. Supposons que la suite des nombres premiers soit finie et désignons le dernier nombre de cette suite par N. Ecrivons le produit

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot N = N!$$

et lui ajoutons 1. Nous obtenons :

$$N! + 1.$$

Etant entier, ce nombre doit contenir au moins un facteur premier, c'est-à-dire qu'il doit être divisible au moins par un nombre premier. Or, par hypothèse, il n'existe pas de nombre premier supérieur à N, et d'autre part, le nombre $N!+1$ n'est divisible par aucun des nombres inférieurs ou égaux à N, puisque chaque fois on obtient le reste 1.

Admettre que la suite des nombres premiers est finie conduit donc à un résultat absurde. Ainsi, quelle que soit la longueur d'une suite de nombres divisibles consécutifs dans la suite naturelle de nombres entiers, nous pouvons être sûrs qu'après elle on trouvera encore une infinité de nombres premiers.

Le plus grand nombre premier connu

Une chose est de savoir qu'il *existe* des nombres premiers aussi grands que l'on veut, et autre chose, déterminer parmi les très grands nombres, lesquels sont premiers. Plus un nombre est grand, plus il faut faire de calculs pour savoir si ce nombre est premier ou non. Voici le plus grand nombre dont on sait à l'heure actuelle qu'il est premier

$$2^{2281}-1.$$

Ce nombre contient environ 700 chiffres. Les calculs par lesquels on a trouvé que ce nombre est un nombre premier ont été effectués à l'aide des machines à calculer modernes (voir chapitre I, II).

Un calcul sérieux

Dans la pratique, on a souvent affaire à des calculs arithmétiques qui seraient extrêmement difficiles sans l'aide des méthodes algébriques.

Soit à effectuer, par exemple, l'opération suivante:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}.$$

(Ce calcul est nécessaire pour établir si la technique, qui s'occupe de vitesses, petites par rapport à la vitesse de la propagation des ondes électromagnétiques, a le droit de se servir de l'ancienne loi de composition de vitesses, sans tenir compte des changements que la théorie de la relativité a introduits dans la mécanique. Selon l'ancienne mécanique, un corps qui participe à deux mouvements de même direction avec les vitesses respectives v_1 et v_2 km/s a une vitesse totale de (v_1+v_2) km/s. La nouvelle théorie, par contre, donne pour cette vitesse l'expression

$$\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\ \text{km/s}$$

où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, égale environ à 300 000 km/s. En particulier, si un corps participe à deux mouvements de même direction avec les vitesses $v_1=v_2=$ $=1$ km/s, sa vitesse selon l'ancienne mécanique sera 2 km/s, et suivant la nouvelle :

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}\ \text{km/s}.$$

Quelle est la différence entre ces résultats ? Peut-elle être enregistrée par des appareils de mesure de haute précision ? Pour élucider ce problème important, on est obligé de faire le calcul indiqué plus haut.)

Effectuons ce calcul de deux façons : d'abord, par l'arithmétique et ensuite par l'algèbre. Il

suffit de jeter un coup d'œil sur les longues colonnes de chiffres ci-dessous pour se convaincre des avantages indiscutables de la méthode algébrique.

Transformons d'abord notre fraction à « plusieurs étages » :

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}=\frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

Divisons maintenant le numérateur par le dénominateur :

180 000 000 000	90 000 000 001
90 000 000 001	1,999 999 999 977...
899 999 999 990	
810 000 000 009	
899 999 999 810	
810 000 000 009	
899 999 998 010	
810 000 000 009	
899 999 980 010	
810 000 000 009	
899 999 800 010	
810 000 000 009	
899 998 000 010	
810 000 000 009	
899 980 000 010	
810 000 000 009	
899 800 000 010	
810 000 000 009	
898 000 000 010	
810 000 000 009	
880 000 000 010	
810 000 000 009	
700 000 000 010	
630 000 000 007	
70 000 000 003	

Comme on le voit, ce calcul est très fatigant ; de plus, il est facile d'y commettre des erreurs. Cependant, pour résoudre le problème, il est important de savoir exactement où finit la suite de 9 et où commence la suite des autres chiffres.

Voyons maintenant comment l'algèbre permet de faire rapidement le même calcul. Elle se sert de l'égalité approchée suivante : si a est une très petite fraction, on a

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a.$$

Il est très facile de vérifier si cette égalité est valable : comparons le dividende 1 avec le produit du diviseur par le quotient :

$$1=(1+a)(1-a),$$

c'est-à-dire $1=1-a^2$.
Puisque a est une très petite fraction (par exemple 0,001), a^2 est une fraction encore plus petite (0,000001) qui peut être négligée.

Appliquons maintenant ce que nous venons de dire à notre calcul * :

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9\cdot 10^{10}}} \approx 2(1-0{,}111\ldots\cdot 10^{-10})=$$
$$=2-0{,}000\,000\,000\,0222\ldots=1{,}999\,999\,999\,9777\ldots$$

Nous sommes arrivés aux mêmes résultats que précédemment, mais par une voie beaucoup plus courte.

(Indiquons, pour le lecteur que cela intéresse, la signification du résultat obtenu. Il signifie

---

* Nous nous servirons ici de l'égalité approchée

$$\frac{A}{1+a} \approx A\,(1-a).$$

qu'ici, par suite de la petitesse de la vitesse considérée par rapport à la vitesse de la lumière, le désaccord entre les deux lois de composition des vitesses n'est pratiquement pas décelable. Il ne se fait sentir qu'au onzième chiffre décimal du nombre à déterminer, tandis que les mesures de longueur les plus précises ne dépassent pas le 9e chiffre après la virgule, et se limitent couramment à 3 ou 4 chiffres. Nous pouvons donc considérer à bon droit que la nouvelle mécanique d'Einstein ne change pratiquement rien dans les calculs techniques qui concernent des corps animés de mouvements « lents » (par rapport à la propagation de la lumière.)

L'algèbre ne simplifie pas toujours

Bien que l'algèbre rende d'importants services à l'arithmétique, il est des cas où l'intervention de l'algèbre complique inutilement le calcul. La vraie connaissance des mathématiques consiste à choisir toujours la méthode la plus directe et la plus sûre, qu'elle appartienne à l'arithmétique, à l'algèbre ou à la géométrie, etc. Voilà pourquoi il est utile d'envisager un cas où l'emploi de l'algèbre ne fait que compliquer les choses. Considérons le problème suivant.

Trouver le plus petit nombre qui, divisé

par 2 donne comme reste 1,
» 3 » » » 2,
» 4 » » » 3,
» 5 » » » 4,
» 6 » » » 5,
» 7 » » » 6,
» 8 » » » 7,
» 9 » » » 8.

Solution

On m'a proposé ce problème en disant : « Comment allez-vous le résoudre ? Il y a ici trop d'équations, on s'embrouille là-dedans. »

Or, il n'est nul besoin ici d'équations : un simple raisonnement arithmétique donne rapidement la solution.

Ajoutons une unité au nombre cherché. Quel sera le reste lorsqu'on divisera ce nombre par 2 ? Le reste sera $1+1=2$; autrement dit, ce nombre est divisible par 2.

De la même façon on peut diviser ce nombre par 3, par 4, par 5, par 6, par 7, par 8 et par 9. Le plus petit nombre ainsi divisible est $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$, et le nombre cherché est 2519, ce qu'on peut vérifier aisément.

CHAPITRE IV

LES ÉQUATIONS DE DIOPHANTE

Achat d'une tente

Problème

Vous devez payer 19 roubles une tente, mais vous n'avez que des billets de 3 roubles, et la caissière n'a que des billets de 5 roubles. Pouvez-vous payer votre achat et de quelle façon avec l'argent dont vous disposez ? Le problème comporte deux inconnues : le nombre (x) de billets de 3 roubles que vous devez donner et le nombre (y) de billets de 5 roubles que vous devez recevoir pour payer au total 19 roubles. Mais on ne peut poser qu'une seule équation :

$$3x - 5y = 19.$$

Bien qu'une équation à deux inconnues ait un nombre infini de solutions, il n'est pas encore évident qu'on trouvera parmi celles-ci une solution avec x et y entiers et positifs. Voilà pourquoi l'algèbre a mis au point une méthode de résolution de ces équations « indéterminées ». C'est le célèbre mathématicien de l'antiquité Diophante qui les a introduites dans l'algèbre, et pour cette raison on les appelle souvent équations de Diophante.

Solution

Sur l'exemple donné, nous allons montrer comment il faut résoudre ces équations.

Il s'agit de trouver les valeurs de x et de y dans l'équation

$$3x-5y=19,$$

sachant que x et y sont des nombres *entiers* et *positifs.*

Séparons l'inconnue dont le coefficient est plus petit, c'est-à-dire $3x$; nous obtenons

$$3x=19+5y$$

$$\text{d'où } x=\frac{19+5y}{3}=6+y+\frac{1+2y}{3}.$$

Puisque x, 6 et y sont des nombres entiers, l'égalité sera juste à condition que $\frac{1+2y}{3}$ soit également un nombre entier. Désignons-le par t. On a alors

$$x=6+y+t,$$

$$\text{où } t=\frac{1+2y}{3}$$

et par suite

$$3t=1+2y, \quad 2y=3t-1.$$

Tirons y de la dernière équation :

$$y=\frac{3t-1}{2}=t+\frac{t-1}{2}.$$

Puisque y et t sont des nombres entiers, $\frac{t-1}{2}$ doit également être un certain nombre entier t_1. Par suite

$$y=t+t_1 \quad \text{et} \quad t_1=\frac{t-1}{2},$$

$$\text{d'où } 2t_1=t-1 \quad \text{et} \quad t=2t_1+1.$$

Introduisons la valeur $t=2t_1+1$ dans les égalités précédentes :

$$y=t+t_1=(2t_1+1)+t_1=3t_1+1,$$
$$x=6+y+t=6+(3t_1+1)+(2t_1+1)=8+5t_1.$$

Ainsi nous avons trouvé pour x et y les expressions *

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1.$$

Les nombres x et y sont, comme nous le savons, des nombres entiers et positifs, c'est-à-dire plus grands que 0. Par suite,

$$8 + 5t_1 > 0,$$
$$1 + 3t_1 > 0.$$

De ces inégalités nous tirons :

$$5t_1 > -8 \quad \text{et} \quad t_1 > -\frac{8}{5},$$

$$3t_1 > -1 \quad \text{et} \quad t_1 > -\frac{1}{3}.$$

La valeur de t_1 est donc limitée ; elle est plus grande que $-\frac{1}{3}$ (et à fortiori plus grande que $-\frac{8}{5}$). Mais puisque t_1 est un nombre entier, nous en déduisons qu'il peut avoir seulement les valeurs suivantes :

$$t_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots$$

Les valeurs correspondantes de x et de y sont :

$$x = 8 + 5t_1 = 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ \ldots\ldots$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots\ldots$$

---

* Strictement parlant, nous avons démontré seulement que toute solution en nombres entiers de l'équation $3x - 5y = 19$ a la forme $x = 8 + 5t_1$, $y = 1 + 3t_1$, où t_1 est un certain nombre entier. Mais nous n'avons pas démontré la réciproque, à savoir qu'à *toute* valeur entière de t_1 correspond une solution en nombres entiers de l'équation donnée. On peut cependant le vérifier facilement en inversant le raisonnement ou en substituant les valeurs trouvées de x et de y dans l'équation initiale.

On sait maintenant comment payer :

ou bien vous donnez 8 billets de 3 roubles et recevez un billet de 5 roubles :

$$8 \cdot 3 - 5 = 19,$$

ou bien vous payez 13 billets de 3 roubles et recevez 4 billets de 5 roubles :

$$13 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = 19,$$

et ainsi de suite.

Théoriquement ce problème a un nombre de solutions infini, mais pratiquement, le nombre de solutions est limité par le fait que ni l'acheteur ni la caissière ne possèdent un nombre infini de billets. Si, par exemple, chacun d'eux a seulement 10 billets, on ne peut payer que d'une seule façon : donner 8 billets de 3 roubles et recevoir 5 roubles. Comme nous le voyons, les équations indéterminées peuvent pratiquement donner des paires de solutions bien déterminées.

Revenant à notre problème, nous proposons au lecteur, à titre d'exercice, de résoudre une variante de celui-ci ; en l'occurrence, le cas où l'acheteur a seulement des billets de 5 roubles et la caissière des billets de 3 roubles. On obtiendra comme résultat la suite de solutions suivantes :

$$x = 5,\ 8,\ 11,\ \ldots,$$
$$y = 2,\ 7,\ 12,\ \ldots$$

En effet,

$$5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 19,$$
$$8 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 19,$$
$$11 \cdot 5 - 12 \cdot 3 = 19,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Nous aurions pu obtenir le même résultat à partir de la solution du problème initial, en nous servant d'une méthode algébrique simple.

Puisque *donner* des billets de 5 roubles et *recevoir* des billets de 3 roubles revient à « *recevoir* des billets de 5 roubles négatifs » et à « *donner* des billets de 3 roubles négatifs », la nouvelle variante peut être résolue par la même équation que nous avons posée pour le problème initial :

$$3x-5y=19,$$

mais à condition que x et y soient des nombres *négatifs*. A partir des égalités

$$x=8+5t_1,$$
$$y=1+3t_1$$

et sachant que $x<0$ et $y<0$, nous déduisons alors :

$$8+5t_1<0$$
$$1+3t_1<0$$

et par suite $t_1<-\frac{8}{5}$.

En prenant $t_1=-2, -3, -4$, etc. nous obtenons des formules précédentes les valeurs suivantes de x et de y :

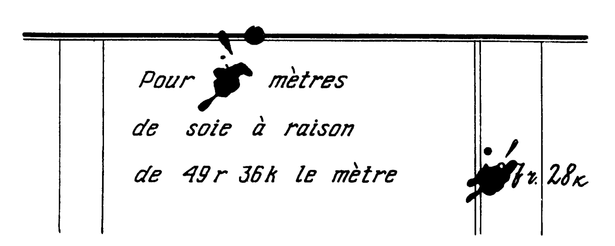
$t_1=-2$	-3	-4
$x=-2$	-7	-12
$y=-5$	-8	-11

La première paire de solutions, $x=-2$ et $y=-5$, signifie que l'acheteur « paye moins 2 billets de 3 roubles » et « reçoit moins 5 billets de 5 roubles ». Ce qui signifie qu'il paye 5 billets de 5 roubles et reçoit comme reste 2 billets de 3 roubles. Les autres solutions s'interprètent de la même façon.

Vérification des comptes d'un magasin

Problème

Lors de la vérification de la comptabilité d'un magasin une des inscriptions s'est trouvée couverte par une tache d'encre :



Il était impossible de lire le nombre de mètres de soie vendus, mais il était hors de doute que ce nombre n'était pas fractionnaire ; dans l'inscription de la somme reçue on pouvait distinguer seulement les trois derniers chiffres et être sûr qu'à gauche de ceux-ci se trouvaient 3 chiffres quelconques.

Est-ce que d'après ces traces la commission de contrôle pouvait rétablir l'inscription ?

Solution

Désignons le nombre de mètres par x. La somme reçue exprimée en kopecks sera

$$4936x.$$

Désignons par y le nombre exprimé par les 3 chiffres couverts d'encre dans l'inscription de la somme. C'est évidemment le nombre de milliers de kopecks, et la somme entière en kopecks sera

$$1000y + 728.$$

Nous avons l'équation

$$4936x = 1000y + 728$$

soit, après division par 8,

$$617x - 125y = 91.$$

Dans cette équation x et y sont des nombres entiers et y ne peut pas être supérieur à 999 puisque il ne peut comprendre que 3 chiffres. Résolvons l'équation par la méthode indiquée plus haut :

$$125y = 617x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

(Nous avons adopté ici $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$ car il est avantageux d'avoir des restes aussi petits que possible. La fraction

$$\frac{2(17 - 4x)}{125}$$

est un nombre entier et puisque 2 n'est pas divisible par 125, $\frac{17-4x}{125}$ doit être un nombre entier que nous désignons par t.)

De l'équation $\frac{17-4x}{125} = t$ nous avons $17-4x= = 125t$,

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1,$$

où $t_1 = \frac{1-t}{4}$

et par suite $4t_1 = 1 - t$; $t = 1 - 4t_1$;

$$x = 125t_1 - 27, \quad y = 617t_1 - 134^*.$$

---

* Remarquez que les coefficients de t_1, sont égaux à ceux de x et de y dans l'équation initiale $617x-125y= =91$ et qu'un des coefficients de t_1 est de signe contraire. Ce n'est pas une chose fortuite : on peut démontrer qu'il en est toujours ainsi, si les coefficients de x et de y sont premiers entre eux.

Nous savons que $100 \leqslant y < 1000$, par suite

$$100 \leqslant 617t_1 - 134 < 1000,$$

$$\text{d'où } t_1 \geqslant \frac{234}{617} \quad \text{et} \quad t_1 < \frac{1134}{617}.$$

Il est évident qu'il n'existe qu'une seule valeur entière pour t_1 :

$$t_1 = 1,$$

alors $x=98$, $y=483$, c'est-à-dire que l'on a vendu 98 mètres de soie pour la somme de 4 837 roubles 28 kopecks. L'inscription a été ainsi rétablie.

Achat de timbres-poste

Problème

Pour la somme de 5 roubles il faut acheter 20 timbres, de 40 kopecks, 25 kopecks et 5 kopecks. Combien il y aura de timbres de chaque valeur?

Solution

Nous avons ici *deux* équations à *trois* inconnues :

$$40x + 25y + 5z = 500,$$
$$x + y + z = 20,$$

où x est le nombre de timbres de 40 kopecks, y le nombre de timbres de 25 kopecks et z le nombre de timbres de 5 kopecks. En retranchant la seconde équation de la première divisée par 5, nous obtenons une équation à deux inconnues :

$$7x + 4y = 80.$$

Tirons y :

$$y = 20 - 7 \cdot \frac{x}{4}.$$

Il est évident que $\frac{x}{4}$ est un nombre entier. Désignons-le par t. Nous avons :

$$y = 20 - 7t, \quad x = 4t.$$

Substituons les expressions correspondantes de x et de y dans la deuxième équation initiale :

$$4t + 20 - 7t + z = 20;$$

nous obtenons :

$$z = 3t.$$

Puisque $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ il n'est pas difficile de trouver les limites de t :

$$0 < t < 2\frac{6}{7}.$$

Nous en déduisons que t n'a que 2 valeurs entières possibles :

$$t = 1 \quad \text{et} \quad t = 2.$$

Les valeurs correspondantes de x, de y et de z sont les suivantes :

$t=$	1	2
$x=$	4	8
$y=$	13	6
$z=$	3	6

Vérification

$$4\cdot 40 + 13\cdot 25 + 3\cdot 5 = 500,$$
$$8\cdot 40 + 6\cdot 25 + 6\cdot 5 = 500.$$

L'achat de timbres ne peut alors être fait que de deux façons.

Le problème suivant est du même genre.

Achat de fruits

Problème

Pour la somme de 50 roubles on a acheté 100 fruits différents aux prix suivants : melons,

5 roubles la pièce ; ananas, 1 rouble la pièce ; pommes, 10 kopecks la pièce.

Combien de fruits de chaque sorte ont été achetés ?

Solution

En désignant le nombre de melons par x, celui des ananas par y et celui des pommes par z, posons les deux équations :

$$\begin{cases} 500x+100y+10z=5000, \\ x+y+z=100. \end{cases}$$

En retranchant la seconde équation de la première divisée par 10, nous obtenons l'équation à deux inconnues :

$$49x+9y=400.$$

La marche de la solution est :

$$y=\frac{400-49x}{9}=44-5x+\frac{4(1-x)}{9}=44-5x+4t,$$

$$t=\frac{1-x}{9}, \quad x=1-9t,$$

$$y=44-5(1-9t)+4t=39+49t.$$

Des inégalités $1-9t>0$ et $39+49t>0$ nous établissons que $\frac{1}{9}>t>-\frac{39}{49}$ et par suite $t=0$. On a alors

$$x=1, \quad y=39.$$

En mettant ces valeurs de x et y dans la deuxième équation on obtient : $z=60$.

On a donc acheté un melon, 39 ananas et 60 pommes.

Tout autre combinaison est impossible.

Deviner la date de naissance

Problème

Lorsqu'on sait résoudre des équations indéterminées, on peut proposer le jeu suivant.

Vous dites à un ami de multiplier sa date de naissance par 12 et le numéro du mois par 31. Il vous donne la somme des deux produits, et d'après celle-ci vous calculez la date de naissance. Si, par exemple, votre ami est né le 9 février, il fait les opérations suivantes :

$$9\cdot 12=108,\quad 2\cdot 31=62,\quad 108+62=170.$$

Il vous dit le nombre 170 et vous trouvez la date. Comment faites-vous ?

Solution

Le problème se ramène à la solution de l'équation indéterminée

$$12x+31y=170$$

où x et y sont entiers et positifs, x (quantième du mois) ne dépassant pas 31, et y (numéro du mois) ne dépassant pas 12.

$$x=\frac{170-31y}{12}=14-3y+\frac{2+5y}{12}=14-3y+t,$$

$$2+5y=12t,$$

$$y=\frac{-2+12t}{5}=2t-2\cdot\frac{1+t}{5}=2t-2t_1,$$

$$1-t=5t_1,\quad t=1-5t_1,$$

$$y=2(1-5t_1)-2t_1=2-12t_1,$$

$$x=14-3(2-12t_1)+1-5t_1=9+31t_1.$$

Sachant que $31\geqslant x>0$ et $12\geqslant y>0$, nous trouvons les limites de t_1 :

$$-\frac{9}{31}<t_1<\frac{1}{6}.$$

Par suite,

$$t_1 = 0, \quad x = 9, \quad y = 2.$$

La date de naissance tombe le 9 du deuxième mois, autrement dit le 9 février.

Nous allons démontrer que ce système réussit toujours, c'est-à-dire que l'équation a toujours une seule solution entière et positive. Désignons par a le nombre que votre ami vous a indiqué, de sorte que la détermination de la date de naissance se ramène à la solution de l'équation

$$12x + 31y = a.$$

Raisonnons par l'absurde. Admettons que cette équation a deux solutions entières et positives distinctes, à savoir : une solution x_1, y_1, et une solution x_2, y_2, les valeurs de x_1 et de x_2 ne dépassant pas 31 et celles de y_1 et y_2 n'étant pas supérieures à 12. Nous avons :

$$12x_1 + 31y_1 = a,$$
$$12x_2 + 31y_2 = a.$$

En retranchant la deuxième équation de la première on obtient :

$$12(x_1 - x_2) + 31(y_1 - y_2) = 0.$$

Il résulte de cette égalité que le nombre $12(x_1 - x_2)$ est divisible par 31. Mais puisque x_1 et x_2 sont des nombres positifs aux plus égaux à 31, la différence $x_1 - x_2$ est inférieure à 31. Pour cette raison le nombre $12(x_1 - x_2)$ n'est divisible par 31 qu'au cas où $x_1 = x_2$, c'est-à-dire quand la première solution coïncide avec la seconde. Supposer qu'il existe deux solutions distinctes mène donc à une contradiction.

La vente des poulets

Ancien problème

Trois sœurs sont venues au marché pour y vendre des poulets. La première a apporté 10 poulets, la deuxième 16 et la troisième 26. Avant midi elles ont vendu chacune une partie de leurs poulets au même prix. Dans l'après-midi, craignant de ne pouvoir tout vendre, elles ont baissé le prix et vendu le reste des poulets également au même prix. Les trois sœurs sont revenues chez elles, avec chacune 35 roubles.

Quel était le prix de vente des poulets avant midi et après ?

Solution

Désignons par x, y, et z le nombre de poulets vendus respectivement par chaque sœur avant midi. Dans l'après-midi elles ont vendu $10-x$, $16-y$, et $26-z$ poulets. Désignons par m le prix d'un poulet vendu avant midi, et par n celui d'un poulet vendu dans l'après-midi. Pour plus de clarté comparons ces désignations :

	Nombre de poulets vendus			Prix
Avant midi	x	y	z	m
Dans l'après-midi	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

La première sœur a obtenu :

$mx+n(10-x)$; par suite, $mx+n(10-x)=35$.

La deuxième sœur a obtenu :

$my+n(16-y)$; par suite, $my+n(16-y)=35$.

La troisième a recu :

$mz+n(26-z)$; par suite, $mz+n(26-z)=35$.

Transformons ces trois équations :

$$\begin{cases} (m-n)x+10n=35, \\ (m-n)y+16n=35, \\ (m-n)z+26n=35. \end{cases}$$

En retranchant de la troisième équation la première, puis la deuxième, nous obtenons :

$$\begin{cases} (m-n)(z-x)+16n=0, \\ (m-n)(z-y)+10n=0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (m-n)(x-z)=16n, \\ (m-n)(y-z)=10n. \end{cases}$$

Divisons la première de ces équations par la deuxième

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{8}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}.$$

Puisque x, y, z sont des nombres entiers, les différences $x-z$, $y-z$ sont également des nombres entiers. Pour que l'égalité

$$\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}$$

existe, il est nécessaire que $x-z$ soit divisible par 8 et que $y-z$ soit divisible par 5.

Il en résulte que

$$\frac{x-z}{8}=t=\frac{y-z}{5},$$

$$\text{d'où} \quad x=z+8t,$$
$$y=z+5t.$$

Remarquons que le nombre t est non seulement entier mais positif, puisque $x>z$ (dans le cas contraire, la première sœur n'aurait pas pu obtenir autant que la troisième).

Puisque $x<10$, on a

$$z+8t < 10.$$

Pour des valeurs entières et positives de z et de t la dernière inégalité est satisfaite seulement si $z=1$ et $t=1$. En mettant ces valeurs dans les équations

$$x=z+8t \quad \text{et} \quad y=z+5t$$

on obtient : $x=9$, $y=6$.

Occupons-nous maintenant des équations

$$mx+n\,(10-x)=35,$$
$$my+n\,(16-y)=35,$$
$$mz+n\,(26-z)=35,$$

en y substituant les valeurs trouvées de x, y et z, nous obtenons les prix cherchés :

$$m=3{,}75 \text{ roubles}, \quad n=1{,}25 \text{ roubles}.$$

Ainsi, les trois sœurs, ont vendu les poulets avant midi au prix de 3 roubles 75 kopecks la pièce et dans l'après-midi au prix de 1 rouble 25 kopecks.

Deux nombres et quatre opérations

Problème

Pour résoudre le problème précédent, qui nous a conduit à trois équations à cinq inconnues, nous n'avons pas utilisé la méthode générale, mais un raisonnement mathématique libre. De la même façon nous allons résoudre les problèmes suivants qui conduisent à des équations indéterminées du second degré.

Voici le premier de ces problèmes.

Avec deux nombres entiers et positifs on a effectué les quatre opérations suivantes :

1) on les a additionnés ;

2) du plus grand on a retranché le plus petit ;

3) on a multiplié les deux nombres l'un par l'autre ;

4) on a divisé le plus grand nombre par le plus petit.

Les résultats obtenus ont été additionnés et leur somme a été trouvée égale à 243. Trouver ce nombre.

Solution

En désignant le plus grand nombre par x et l'autre par y, on a

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=243$$

Multipliant cette équation par y et simplifiant, on obtient :

$$x(2y+y^2+1)=243y.$$

Mais $2y+y^2+1=(y+1)^2$. Pour cette raison

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}.$$

Pour que x soit un nombre entier le dénominateur $(y+1)^2$ doit être un des diviseurs du nombre 243 (parce que y ne peut pas avoir de facteurs communs avec $y+1$). Sachant que $243=3^5$ nous en déduisons que 243 n'est divisible que par les nombres suivants qui sont des carrés parfaits : 1, 3^2, 9^2. Ainsi, $(y+1)^2$ doit être égal à 1, à 3^2 ou à 9^2 d'où (en nous rappelant que y doit être positif) on trouve que y est égal à 8 ou à 2 ; x est alors égal à

$$\frac{243\cdot 8}{81} \text{ ou à } \frac{243\cdot 2}{9}.$$

Ainsi, les nombres cherchés sont : 24 et 8 ou 54 et 2.

Les côtés d'un rectangle

Problème

Les côtés d'un rectangle sont exprimés par des nombres entiers. Quelles doivent être leurs longueurs pour que le nombre exprimant le périmètre du rectangle soit égal à celui qui exprime sa surface ?

Solution

En désignant les côtés du rectangle respectivement par x et y nous avons l'équation

$$2x+2y=xy,$$

d'où

$$x=\frac{2y}{y-2}.$$

Puisque x et y doivent être positifs, le nombre $y-2$ doit l'être également, d'où $y>2$.

Notons maintenant que

$$x=\frac{2y}{y-2}=\frac{2(y-2)+4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}.$$

Puisque x est entier, l'expression $\frac{4}{y-2}$ doit également être un nombre entier. Mais avec $y>2$, cela n'est possible que si y est égal à 3,4 ou 6. Les valeurs correspondantes de x seront 6, 4, 3.

Ainsi la figure cherchée est soit un rectangle dont les côtés sont respectivement égaux à 3 et 6, soit un carré dont le côté est égal à 4.

Deux nombres de deux chiffres

Problème

Les nombres 46 et 96 possèdent une propriété intéressante : leur produit ne change pas lorsqu'on permute leurs chiffres. En effet,

$$46 \cdot 96 = 4416 = 64 \cdot 69.$$

On demande d'établir s'il existe d'autres couples de nombres de deux chiffres possédant la même propriété, et de les trouver tous.

Solution

Désignons les chiffres des nombres cherchés respectivement par x et y, z et t et posons l'équation

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Après simplification, il vient :

$$xz = yt$$

où x, y, z et t sont des nombres entiers inférieurs à 10. Pour trouver les solutions, écrivons à l'aide de 9 chiffres toutes les paires de nombres à produits égaux :

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 & 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \\ 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 & 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 & 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 \\ 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 & 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 \\ 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 & \end{array}$$

On a 9 égalités. De chacune on peut tirer une ou deux des couples cherchées. Par exemple, l'égalité $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ nous donne une solution :

$$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24.$$

De l'égalité $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ nous tirons deux solutions :

$$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36, \quad 13 \cdot 62 = 31 \cdot 26.$$

De cette façon nous trouvons les 14 solutions suivantes :

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$	$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$	$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$	$24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$	$26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$
$13 \cdot 93 = 31 \cdot 39$	$34 \cdot 86 = 43 \cdot 68$
$14 \cdot 82 = 41 \cdot 28$	$36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$
$23 \cdot 64 = 32 \cdot 46$	$46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$

Les nombres de Pythagore

Pour tracer sur le terrain des lignes perpendiculaires, les arpenteurs utilisent souvent la méthode suivante, commode et précise. En un point A d'une droite MN (figure 9) on demande d'abaisser une perpendiculaire à cette droite. Dans la direction AM mesurons trois fois une distance quelconque a. Puis faisons trois nœuds sur la corde, distants respectivement de $4a$ et $5a$. Fixons les nœuds extrêmes aux points A et B, et tendons la corde en tirant sur le nœud médian. La corde formera alors avec AB un triangle dont l'angle A sera droit.

Cette méthode antique, que les bâtisseurs des pyramides égyptiennes utilisaient déjà, est fon-



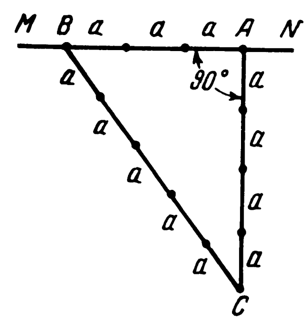


Fig. 9

dée sur le fait que tout triangle dont les côtés se rapportent comme 3 :4 :5 est un triangle rectangle suivant le théorème de Pythagore, puisque

$$3^2+4^2=5^2.$$

Outre les nombres 3, 4, 5, il existe infinité de nombres entiers et positifs a, b, c qui satisfont la relation $a^2+b^2=c^2$. On les appelle *nombres de Pythagore*. Selon le théorème de Pythagore, ces nombres peuvent mesurer la longueur des côtés d'un triangle rectangle ; voilà pourquoi a et b sont appelés côtés et c hypoténuse.

Il est clair que si a, b, c forment un groupe de trois nombres de Pythagore, pa, pb, pc, où p est un facteur entier, sont aussi des nombres de Pythagore. Inversement, si des nombres de Pythagore ont un facteur commun, on peut les réduire en les divisant par ce facteur commun et on obtient de nouveau un groupe de trois nombres de Pythagore. Nous étudierons donc d'abord les groupes de trois nombres de Pythagore, premiers entre eux (les autres s'en déduisent en multipliant par un facteur entier p).

Démontrons que dans chacun de ces groupes de trois nombres a, b, c un des « côtés » doit être pair et l'autre impair. Raisonnons par l'absurde. Si les deux « côtés » a et b sont pairs, le nombre a^2+b^2 sera également pair ainsi que l'« hypoténuse ». Mais cela contredit l'hypothèse selon laquelle les nombres a, b, c n'ont pas de facteur commun, puisque trois nombres pairs ont pour facteur commun 2. De cette façon, au moins un des « côtés » a et b est impair.

Il reste encore une possibilité : les deux « côtés » sont impairs et l'« hypoténuse » est paire. Il n'est pas difficile de démontrer que cela est impossible. En effet, si les « côtés » sont de la forme

$$2x+1 \quad \text{et} \quad 2y+1,$$

la somme de leur carré est

$$4x^2+4x+1+4y^2+4y+1=4(x^2+x+y^2+y)+2,$$

c'est-à-dire un nombre qui, lorsqu'on le divise par 4, fournit un reste égal à 2. Cependant, le carré de tout nombre pair doit être divisible par 4. Il en résulte que la somme des carrés de 2 nombres impairs ne peut pas être le carré d'un nombre pair ; autrement dit, les trois nombres indiqués ne sont pas des nombres de Pythagore.

Ainsi, l'un des côtés a et b est pair et l'autre est impair. Par suite, le nombre a^2+b^2 est impair, et l'hypoténuse c par conséquent.

Soit a le côté impair et b le côté pair. De l'égalité

$$a^2+b^2=c^2$$

on tire immédiatement :

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)\cdot(c-b).$$

Les facteurs $c+b$ et $c-b$ qui se trouvent dans la partie droite sont des ombres premiers entre eux. En effet, si ces nombres avaient un facteur simple commun, différent de l'unité, la somme

$$(c+b)+(c-b)=2c,$$

la différence

$$(c+b)-(c-b)=2b$$

et le produit

$$(c+b)\,(c-b)=a^2$$

seraient divisibles par ce facteur, c'est-à-dire que les nombres $2c$, $2b$ et a auraient un facteur commun. Puisque a est un nombre impair, ce facteur diffère de 2 et, par conséquent, les nombres a, b, c doivent avoir le même facteur, ce qui est impossible. Cette contradiction montre que les nombres $c+b$ et $c-b$ sont bien premiers entre eux.

Mais si le produit de nombres premiers entre eux est un carré parfait, chacun de ces nombres est aussi un carré, d'où

$$\begin{cases} c+b=m^2, \\ c-b=n^2. \end{cases}$$

Ayant résolu ce système on trouve

$$c=\frac{m^2+n^2}{2}, \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2},$$
$$a^2=(c+b)\,(c-b)=m^2n^2, \qquad a=mn.$$

Ainsi, les nombres de Pythagore ont la forme suivante :

$$a=mn, \qquad b=\frac{m^2-n^2}{2}, \qquad c=\frac{m^2+n^2}{2},$$

où m et n sont des nombres impairs premiers entre eux. Le lecteur peut facilement vérifier la

réciproque : pour des valeurs impaires quelconques de m et n, les formules indiquées donnent trois nombres de Pythagore a, b, c.

Voici quelques groupes de trois nombres de Pythagore, obtenus pour différentes valeurs de m et de n :

pour $m=3$,	$n=1$	$3^2+4^2=5^2$
pour $m=5$,	$n=1$	$5^2+12^2=13^2$
pour $m=7$,	$n=1$	$7^2+24^2=25^2$
pour $m=9$,	$n=1$	$9^2+40^2=41^2$
pour $m=11$,	$n=1$	$11^2+60^2=61^2$
pour $m=13$,	$n=1$	$13^2+84^2=85^2$
pour $m=5$,	$n=3$	$15^2+8^2=17^2$
pour $m=7$,	$n=3$	$21^2+20^2=29^2$
pour $m=11$,	$n=3$	$33^2+56^2=65^2$
pour $m=13$,	$n=3$	$39^2+80^2=89^2$
pour $m=7$,	$n=5$	$35^2+12^2=37^2$
pour $m=9$,	$n=5$	$45^2+28^2=53^2$
pour $m=11$,	$n=5$	$55^2+48^2=73^2$
pour $m=13$,	$n=5$	$65^2+72^2=97^2$
pour $m=9$,	$n=7$	$63^2+16^2=65^2$
pour $m=11$,	$n=7$	$77^2+36^2=85^2$.

(Tous les autres groupes de 3 nombres de Pythagore ont des facteurs communs ou contiennent des nombres supérieurs à 100.)

Les nombres de Pythagore possèdent plusieurs propriétés curieuses que nous énumérerons sans démonstration :

1) un des « côtés » doit être un multiple de 3,

2) un des « côtés » doit être un multiple de 4,

3) un des nombres de Pythagore doit être un multiple de 5.

On peut vérifier ces propriétés sur les groupes examinés plus haut.

Equation indéterminée du troisième degré

La somme des cubes de trois nombres entiers peut être le cube d'un quatrième nombre. Par exemple :

$$3^3+4^3+5^3=6^3.$$

Cela signifie, entre autres, qu'un cube dont l'arête est longue de 6 cm a le même volume que trois cubes dont les arêtes sont égales à 3 cm, 4 cm et 5 cm (fig. 10), relation à laquelle, dit-on, Platon s'est beaucoup intéressé.

Essayons de trouver d'autres rapports du même genre ; autrement dit, posons le problème suivant : trouver la solution de l'équation $x^3+y^3+z^3=u^3$. Cependant il est plus commode de désigner l'inconnue u par $-t$. L'équation aura alors la forme plus simple

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0.$$

La méthode que nous allons considérer permet de trouver pour cette équation une infinité de solutions entières, positives ou négatives. Soit a, b, c, d et α, β, γ, δ deux groupes de 4 nombres chacun qui satisfont à l'équation. Ajoutons aux nombres du premier groupe les nombres du second groupe multipliés par un certain nombre k, et choisissons k de telle façon que les nombres obtenus

$$a+k\alpha, \quad b+k\beta, \quad c+k\gamma, \quad d+k\delta$$

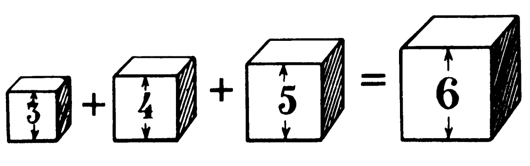


Fig. 10

satisfassent aussi à notre équation. En d'autres termes, choisissons k de telle sorte que l'égalité

$$(a+k\alpha)^3+(b+k\beta)^3+(c+k\gamma)^3+(d+k\delta)^3=0$$

soit satisfaite.

En éliminant les parenthèses et en tenant compte que les groupes de 4 nombres a, b, c, d et α, β, γ, δ satisfont notre équation, c'est-à-dire que les égalités

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0, \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=0,$$

ont lieu, on obtient :

$$3a^2k\alpha+3ak^2\alpha^2+3b^2k\beta+3bk^2\beta^2+3c^2k\gamma+$$
$$+3ck^2\gamma^2+3d^2k\delta+3dk^2\delta^2=0$$

ou

$$3k\left[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)+k\,(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2)\right]=0.$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul. En annulant chacun des facteurs, nous obtenons deux valeurs pour k. La première, $k=0$, ne nous intéresse pas : elle signifie que si on n'ajoute rien aux nombres a, b, c, d, les nombres obtenus satisfont à notre équation. Nous prendrons donc seulement la seconde valeur de k :

$$k=\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}.$$

Ainsi, connaissant deux groupes de 4 nombres qui satisfont à l'équation initiale, on peut trouver un nouveau groupe de 4 nombres : il faut pour cela ajouter aux nombres du premier groupe les nombres du deuxième groupe multipliés par k, où k a la valeur indiquée plus haut.

Pour utiliser cette méthode il faut connaître deux groupes de 4 nombres qui satisfont à l'équation initiale. Nous en connaissons déjà un :

3, 4, 5, —6. Mais comment trouver l'autre? Pour s'en sortir, il suffit de prendre comme second groupe les nombres $r, -r, s, -s$, qui, de façon évidente, satisfont à l'équation initiale. Autrement dit, posons :

$$a=3, \quad b=4, \quad c=5, \quad d=-6,$$
$$\alpha=r, \quad \beta=-r, \quad \gamma=s, \quad \delta=-s.$$

Nous obtenons alors pour k, comme il est facile de le voir, les valeurs suivantes :

$$k=-\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2}=\frac{7r+11s}{7r^2-s^2},$$

et les nombres $a+k\alpha$, $b+k\beta$, $c+k\gamma$, $d+k\delta$ seront respectivement égaux à

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2}, \quad \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2},$$
$$\frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2}, \quad \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, ces 4 expressions satisfont à l'équation initiale

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0.$$

Puisque toutes ces expressions ont le même dénominateur, on peut l'éliminer : autrement dit, les numérateurs de ces fractions satisfont également à l'équation considérée. L'équation est donc satisfaite (pour toutes valeurs de r et de s) par les nombres suivants :

$$x=28r^2+11rs-3s^2,$$
$$y=21r^2-11rs-4s^2,$$
$$z=35r^2+7rs+6s^2,$$
$$t=-42r^2-7rs-5s^2,$$

ce qu'on peut vérifier immédiatement élevant ces expressions au cube et en les additionnant.

En donnant à r et à s différentes valeurs entières, nous pouvons obtenir toute une série de solutions entières de notre équation. Si les nombres obtenus ont un facteur commun, on peut les diviser par ce dernier. Par exemple, pour $r=1$, $s=1$ on obtient pour x, y, z, t les valeurs suivantes : 36, 6, 48, —54, soit, après division par 6, les valeurs 6, 1, 8, —9. De cette façon,

$$6^3+1^3+8^3=9^3.$$

Voici encore une série d'égalités du même type (obtenues après division par le facteur commun) :

pour $r=1$,	$s=2$	$38^3+73^3=17^3+76^3$,
pour $r=1$,	$s=3$	$17^3+55^3=24^3+54^3$,
pour $r=1$,	$s=5$	$4^3+110^3=67^3+101^3$,
pour $r=1$,	$s=4$	$8^3+53^3=29^3+50^3$,
pour $r=1$,	$s=-1$	$7^3+14^3+17^3=20^3$,
pour $r=1$,	$s=-2$	$2^3+16^3=9^3+15^3$,
pour $r=2$,	$s=-1$	$29^3+34^3+44^3=53^3$.

. . . .

Notons que si, dans le groupe initial 3, 4, 5, —6 ou dans l'un des nouveaux groupes obtenus, on intervertit les places des nombres, on obtient, en appliquant la même méthode, une nouvelle série de solutions. Par exemple, en prenant le groupe 3, 5, 4, —6 (c'est-à-dire en posant $a=3$, $b=5$, $c=4$, $d=-6$), nous obtenons pour x, y, z, t les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} x &= 20r^2+10rs-3s^2, \\ y &= 12r^2-10rs-5s^2, \\ z &= 16r^2+8rs+6s^2, \\ t &= -24r^2-8rs-4s^2, \end{aligned}$$

d'où pour différentes valeurs de r et de s une série de nouvelles relations :

pour $r=1$,	$s=1$		$9^3+10^3=1^3+12^3$,
pour $r=1$,	$s=3$		$23^3+94^3=63^3+84^3$,
pour $r=1$,	$s=5$		$5^3+163^3+164^3=206^3$,
pour $r=1$,	$s=6$		$7^3+54^3+57^3=70^3$,
pour $r=2$,	$s=1$		$23^3+97^3+86^3=116^3$,
pour $r=1$,	$s=-3$		$3^3+36^3+37^3=46^3$,

etc.

De cette façon on peut obtenir un nombre infini de solutions de l'équation considérée.

Cent mille marks pour la démonstration d'un théorème

Dans le domaine des équations indéterminées, il y a un problème très connu, car une somme de cent mille marks allemands a été offerte à celui qui le résoudrait.

Le problème consiste à démontrer la proposition suivante, appelée théorème de Fermat : la somme de puissances égales de deux nombres entiers ne peut pas être la même puissance d'un troisième nombre entier. Seule la puissance 2 fait exception.

Autrement dit, il s'agit de démontrer que l'équation

$$x^n+y^n=z^n$$

n'a pas de solution entière pour $n>2$.

Nous allons expliquer ce que nous venons de dire. Nous avons vu que les équations

$$x^2+y^2=z^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=t^3$$

peuvent avoir autant de solutions entières que l'on veut. Mais si vous essayez de trouver trois nombres entiers et positifs pour lesquels l'égalité $x^3+y^3=z^3$ soit valable, toutes vos recherches resteront vaines.

Le même échec vous attend si vous cherchez des exemples pour les puissances 4, 5, 6, etc. Voilà ce qu'affirme le théorème de Fermat.

Que demande-t-on des candidats au prix ? Ils doivent démontrer cette proposition pour toutes les puissances pour lesquelles elle est valable.

Ce théorème a été proposé il y a trois siècles ; or jusqu'à présent, personne n'a pu en donner la démonstration. Les plus grands mathématiciens se sont penchés sur ce problème. Dans le meilleur des cas, ils l'ont démontré pour tel ou tel exposant, ou pour un groupe d'exposants, alors qu'il s'agit de trouver une démonstration *générale* pour un exposant entier quelconque.

Il est intéressant de noter que selon toute probabilité, cette démonstration a été déjà trouvée, puis perdue. L'auteur du théorème, Pierre Fermat*, mathématicien génial du XVIIe siècle, affirmait qu'il connaissait la démonstration. Il a inscrit sa « grande proposition » (comme plusieurs autres théorèmes de la théorie des nombres) sous forme d'une note en marge d'un ouvrage de Diophante, accompagnée de la remarque suivante :

---

* Fermat (1603-1665) n'était pas un mathématicien de profession. Juriste et conseiller au Parlement, il s'occupait de recherches mathématiques pendant ses loisirs. Malgré cela, il a fait une série d'importantes découvertes qu'il n'a d'ailleurs pas publiées. Selon l'usage de l'époque, il en avait donné communication dans des lettres à ses amis Pascal, Descartes, Huygens, Roberval, etc.

« J'ai trouvé une démonstration vraiment étonnante de cette proposition, mais il n'y a pas assez de place ici pour l'exposer. »

Ni dans les papiers du grand mathématicien, ni dans ses lettres on n'a pu trouver trace de cette démonstration.

Les continuateurs de l'œuvre de Fermat ont été obligés de suivre des voies indépendantes. Voici les résultats de leurs efforts : Euler (1797) a démontré le théorème de Fermat pour la troisième et la quatrième puissances. Legendre (1823) l'a démontré pour la cinquième puissance, Lamé et Lebesgue (1840) l'avaient démontré pour la septième puissance * et en 1849 Kummer a démontré ce théorème pour un grand nombre de puissances, entre autres pour tous les exposants inférieurs à 100. Ces derniers travaux dépassent de loin les limites du domaine des mathématiques que connaissait Fermat, et il est étonnant que ce dernier ait pu trouver une démonstration générale de sa « grande proposition ».

Ceux qui s'intéressent à l'histoire et à l'état actuel du problème de Fermat liront avec fruit la brochure de A. Khintchine « Le grand théorème de Fermat ». Ecrit par un spécialiste, cet ouvrage ne suppose chez le lecteur que la connaissance des éléments des mathématiques.

---

* Pour des exposants non premiers (4 excepté) on n'a pas besoin d'une démonstration spéciale ; ces cas se ramènent aux cas des exposants premiers.

CHAPITRE V

LA SIXIÈME OPÉRATION MATHÉMATIQUE

Il existe des opérations inverses de l'addition et de la multiplication, que l'on appelle respectivement soustraction et division. Pour la cinquième opération mathématique, l'élévation à une puissance, on connaît *deux* opérations inverses : la recherche de la base et la recherche de l'exposant. La recherche de la base est la *sixième* opération mathématique, appelée extraction de la racine. La *septième* opération est la recherche de l'exposant, appelée calcul du logarithme. Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi l'élévation à une puissance a deux opérations inverses, alors que l'addition et la multiplication n'en ont qu'une. Les deux termes d'une addition ou d'une multiplication ont les mêmes droits et on peut les intervertir ; mais ce n'est pas le cas pour l'élévation à une puissance : la base et l'exposant n'ont pas les mêmes droits, et on ne peut pas les intervertir (par exemple $3^5 \neq 5^3$). Pour cette raison la recherche de chaque nombre qui participe à l'addition ou à la multiplication se fait par la même méthode, tandis que la recherche de la base et celle de l'exposant se font par des méthodes différentes.

La sixième opération, l'extraction de la racine, est désignée comme on le sait par le signe $\sqrt{\ }$. Mais tout le monde ne sait pas que ce signe est

une déformation de la lettre r, initiale du mot latin qui signifie racine. Au XVI[e] siècle, on se servait encore, pour désigner la racine, d'un R majuscule, à côté duquel on plaçait la première lettre (q) du mot « carré » en latin, ou l'initiale (c) du mot « cubique » pour indiquer la racine qu'il fallait extraire*. Par exemple, on écrivait

$$R.q.4352$$

au lieu de la désignation actuelle

$$\sqrt{4352}.$$

Si l'on ajoute à cela qu'à cette époque, les signes actuels « plus » ou « moins » n'étaient pas utilisés et qu'on écrivait à leur place les lettres p et m, et qu'au lieu des parenthèses on utilisat les signes $\llcorner\ \lrcorner$, on voit que les expressions algébriques d'autrefois se présentaient sous une forme assez étrange pour nous.

Voilà un exemple tiré d'un livre du mathématicien Bombelli (1572) :

$$R.c.\llcorner R.q.4352p.16\lrcorner m.R.c.\llcorner R.q.4352m.16\lrcorner.$$

Nous écririons maintenant :

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$$

Au lieu de la désignation $\sqrt[n]{a}$ on utilise souvent aujourd'hui une autre notation, $a^{\frac{1}{n}}$, qui est très commode : elle souligne que chaque racine n'est autre chose qu'une puissance dont l'exposant

---

* Dans le manuel de mathématiques de Magnitski qui était en usage en Russie au cours de la première moitié du XVIII[e] s. il n'y avait aucun signe pour désigner l'extraction de la racine.

est un nombre fractionnaire. Elle a été proposée par Stevin, mathématicien hollandais du XVIe siècle.

Quel est plus grand ?

Premier problème

Quel est plus grand : $\sqrt[5]{5}$ ou $\sqrt{2}$?
On résout ce problème, ainsi que les suivants, *sans calculer les valeurs des racines.*

Solution

Elevant les deux expressions à la dixième puissance, on obtient :

$$(\sqrt[5]{5})^{10}=5^2=25, \quad (\sqrt{2})^{10}=2^5=32,$$

puisque

$$32>25, \text{ on a } \sqrt{2}>\sqrt[5]{5}.$$

Deuxième problème

Quel est plus grand :

$$\sqrt[4]{4} \text{ ou } \sqrt[7]{7} ?$$

Solution

En élevant les deux expressions à la 28e puissance, on obtient :

$$(\sqrt[4]{4})^{28}=4^7=2^{14}=2^7\cdot 2^7=128^2,$$
$$(\sqrt[7]{7})^{28}=7^4=7^2\cdot 7^2=49^2.$$

Puisque $128>49$, il s'ensuit que

$$\sqrt[4]{4}>\sqrt[7]{7}.$$

Troisième problème

Quel est plus grand :

$$\sqrt{7}+\sqrt{10} \quad \text{ou} \quad \sqrt{3}+\sqrt{19}?$$

Solution

En élevant les deux expressions au carré on obtient :

$$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2=17+2\sqrt{70},$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2=22+2\sqrt{57}.$$

Diminuons les deux expressions de 17 ; il nous reste

$$2\sqrt{70} \text{ et } 5+2\sqrt{57}.$$

Elevons les deux expressions au carré. On a :

$$280 \text{ et } 253+20\sqrt{57}.$$

Après avoir retranché 253 de chaque expression, comparons

$$27 \text{ et } 20\sqrt{57}.$$

Puisque $\sqrt{57}$ est plus grand que 2,20 $\sqrt{57}>40$; par suite,

$$\sqrt{3}+\sqrt{19}>\sqrt{7}+\sqrt{10}.$$

Résoudre en un seul coup d'œil

Problème

Regardez attentivement l'équation

$$x^{x^3}=3$$

et dites à quoi est égal x.

Solution

Tous ceux qui connaissent bien les symboles algébriques comprendront que

$$x=\sqrt[3]{3}.$$

En effet, on a alors :

$$x^3=(\sqrt[3]{3})^3=3,$$

et par suite

$$x^{x^3}=x^3=3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si ce procédé paraît trop rapide, on pourra trouver l'inconnue plus facilement par la méthode suivante.

Posons :

$$x^3=y.$$

On a alors

$$x=\sqrt[3]{y}$$

et l'équation prend la forme

$$(\sqrt[3]{y})^y=3$$

soit, en élevant au cube :

$$y^y=3^3.$$

Il est clair que $y=3$ et par suite

$$x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{3}.$$

Paradoxes algébriques

Premier problème

La sixième opération mathématique peut conduire à des paradoxes algébriques du genre $2\cdot2=5$, $2=3$, etc. L'astuce consiste dans le fait

que l'erreur, assez simple, est dissimulée, et ne peut être trouvée à première vue. Nous allons présenter deux de ces paradoxes.

Le premier est

$$2=3.$$

Ecrivons d'abord cette égalité incontestable :

$$4-10=9-15.$$

Ajoutons aux deux membres un même nombre, $6\frac{1}{4}$;

$$4-10+6\frac{1}{4}=9-15+6\frac{1}{4}.$$

On a donc les transformations suivantes :

$$2^2-2\cdot 2\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

En extrayant la racine carrée des deux membres de l'égalité on obtient

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

On arrive donc à l'égalité absurde

$$2=3.$$

Où est l'erreur ?

Solution

L'erreur réside dans le fait d'avoir déduit de

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$$

que :

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

Le fait que les carrés de deux nombres soient égaux n'entraîne pas nécessairement que ces deux nombres soient identiques. En effet, $(-5)^2 = 5^2$, mais -5 n'est pas égal à 5. Autrement dit, deux nombres de signe contraire, donc non identiques, ont des carrés égaux. C'est ce dont nous n'avions pas tenu compte ici :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

mais $-\frac{1}{2}$ n'est pas égale à $\frac{1}{2}$.

Deuxième problème

Le second paradoxe est celui-ci (fig. 11) :

$$2 \cdot 2 = 5.$$

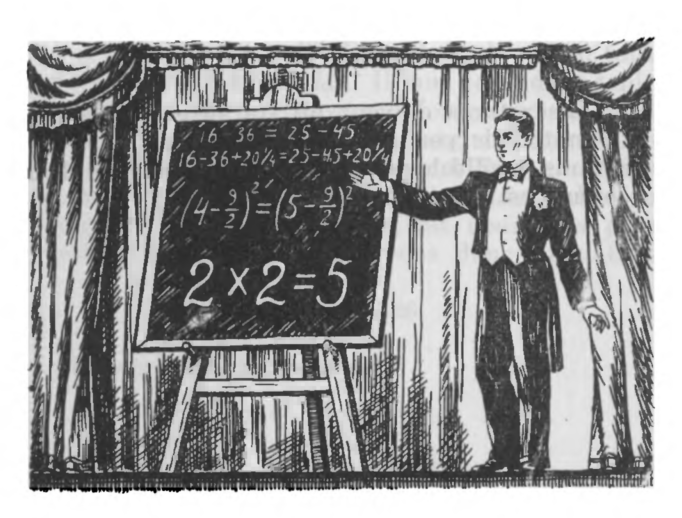


Fig. 11

Il est analogue au précédent, et fondé sur la même erreur. On écrit d'abord l'égalité incontestable :

$$16-36=25-45.$$

Puis on ajoute aux deux membres un même nombre :

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}$$

et on fait les transformations suivantes :

$$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

La même déduction fausse conduit au résultat :

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2},$$

$$4=5,$$

$$2\cdot2=5.$$

Ces astuces doivent mettre en garde les mathématiciens peu expérimentés contre les opérations irréfléchies avec des équations où l'inconnue est sous la racine.

CHAPITRE VI

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Les poignées de main

Problème

Les participants à une conférence ont échangé des poignées de main, et l'un d'eux a compté qu'il y avait eu en tout 66 poignées de main. Combien de personnes ont assisté à la conférence ?

Solution

Le problème est très facile à résoudre par l'algèbre. Chacun des x participants a donné $x-1$ poignées de main. On a donc donné en tout $x(x-1)$ poignées de main. Il faut cependant tenir compte du fait que lorsque Ivanov serre la main de Pétrov, Pétrov serre la main d'Ivanov. Ces deux poignées de main doivent être comptées comme une seule. Par conséquent, le nombre de poignées de main comptées est deux fois plus petit que $x(x-1)$. Nous avons donc l'équation

$$\frac{x(x-1)}{2}=66$$

soit, après transformation :

$$x^2-x-132=0,$$

d'où :

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2},$$

$$x_1=12, \quad x_2=-11.$$

Puisque la solution négative (—11 personnes) n'a pas de sens, nous la rejetons et ne gardons que la première racine : 12 personnes ont pris part à la conférence.

Un essaim d'abeilles

Problème

Aux Indes, dans l'antiquité, les concours publics pour la solution des problèmes difficiles étaient très répandus. Les manuels de mathématiques hindous étaient en partie destinés à préparer à ces concours. « D'après les règles exposées ci-dessous, écrit l'auteur d'un de ces livres, un sage pourrait composer mille autres problèmes. De même que le soleil éclipse les étoiles, un savant éclipsera la gloire d'un autre dans les réunions publiques en proposant et en résolvant des problèmes algébriques.»

Dans l'original tout cela est dit de façon plus poétique, car le livre entier, y compris les problèmes, est en vers. Voici un de ces problèmes, transcrit en prose :

Des abeilles, dont le nombre était égal à la racine carrée de la moitié de l'essaim, se sont posées sur un arbre de jasmin, laissant derrière elles les 8/9 de l'essaim. Une seule abeille du même essaim tournait autour d'un lotus, attirée par le bourdonnement d'une amie tombée par mégarde dans le guet-apens de la fleur au parfum subtil. Combien d'abeilles il y avait dans l'essaim ?

Solution

Si l'on désigne par x le nombre d'abeilles dans l'essaim, l'équation sera de la for-

me :

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x.$$

Nous pouvons la simplifier à l'aide d'un changement de variable :

$$y=\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

On a alors $x=2y^2$ et on obtient l'équation suivante :

$$y+\frac{16y^2}{9}+2=2y^2, \quad \text{ou} \quad 2y^2-9y-18=0.$$

Les deux racines de cette équation sont :

$$y_1=6, \qquad y_2=-\frac{3}{2}.$$

D'où les valeurs correspondantes de x :

$$x_1=72, \qquad x_2=4,5.$$

Puisque le nombre d'abeilles doit être entier et positif, la première racine seule est valable : l'essaim comprenait 72 abeilles.
Vérification :

$$\sqrt{\frac{72}{2}}+\frac{8}{9}\cdot 72+2=6+64+2=72.$$

La bande de singes

Problème

Voici un autre problème hindou :

Séparés en deux groupes,
Des singes s'amusaient gaiement.
Un huitième d'entre eux au carré
Jouaient dans un bosquet ;



Et 12 autres tout près
S'ébattaient dans une clairière
Dis-moi, lecteur, combien
Il y avait de singes ?

Solution

Si le nombre total de singes est égal à x, on a

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x,$$

d'où

$$x_1=48, \quad x_2=16.$$

Le problème a deux solutions positives : il y avait donc soit 48 singes, soit 16. Les deux réponses satisfont à l'énoncé du problème.

La prévoyance des équations

Dans les exemples précédents, nous avons disposé des deux solutions de façon différente suivant les énoncés des problèmes. Dans le premier cas, nous avons rejeté la racine négative comme absurde. Dans le deuxième, nous avons rejeté de même la racine fractionnaire négative. Dans le troisième problème, au contraire, nous avons utilisé les deux racines. L'existence d'une

deuxième solution est parfois une chose tout à fait inattendue non seulement pour celui qui a résolu le problème, mais aussi pour l'auteur de celui-ci. Voici un exemple où l'équation est, pour ainsi dire, plus prévoyante que son auteur.

Un ballon a été lancé verticalement vers le haut à la vitesse de 25 *m* par *s*. Dans combien de secondes aura-t-il atteint une hauteur de 20*m* au-dessus du sol ?

Solution

Pour des corps lancés verticalement vers le haut en l'absence de résistance de l'air, la mécanique établit la relation suivante entre la hauteur atteinte (h), la vitesse initiale (v), l'accélération de la pesanteur (g) et le temps (t) :

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Nous pouvons négliger ici la résistance de l'air car pour de faibles vitesses elle n'est pas très grande. Pour simplifier le calcul admettons g égal à 10 m/s^2 au lieu de 9,8 (l'erreur n'est que de 2%). En substituant dans la formule les valeurs de h, v et g, on a l'équation

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2}$$

soit plus simplement :

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

En résolvant cette équation on trouve

$$t_1 = 1 \quad et \quad t_2 = 4.$$

Le ballon sera donc deux fois à 20*m* au-dessus du sol : dans 1 seconde et dans 4 secondes.

Cela peut paraître invraisemblable et si l'on ne refléchit pas, on est tenté de rejeter la deuxième solution. Ce serait une grosse erreur. La seconde solution a un sens bien précis ; le ballon doit réellement se trouver deux fois à 20 mètres au-dessus du sol : une fois en montant, et une fois en retombant. Il est facile de calculer qu'à une vitesse initiale de 25 *m* par seconde le ballon doit monter pendant 2,5 secondes et arriver à la hauteur de 31,25 mètres. Ayant atteint la hauteur de 20*m* en 1 seconde, le ballon continuera à monter pendant 1,5 seconde pour descendre ensuite pendant le même temps jusqu'à la hauteur de 20 mètres, puis arriver une seconde plus tard sur le sol.

Le problème d'Euler

Dans son autobiographie, Stendhal raconte les souvenirs de ses années d'études :

« Je trouvai chez lui (M. Chabert, professeur) Euler et ses problèmes sur le nombre d'œufs qu'une paysanne apportait au marché...

Cela m'ouvrit l'esprit, j'entrevis ce que c'était que se servir de l'instrument nommé algèbre. Du diable si personne me l'avait jamais dit...»

Voici ce problème, extrait de l'*Introduction à l'algèbre* d'Euler, qui avait tant impressionné le jeune Stendhal :

Deux paysannes ont apporté au marché ensemble 100 œufs. L'une d'elles avait un plus grand nombre d'œufs que l'autre, mais toutes les deux ont reçu la même somme. La première a dit alors à la seconde : « Si j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 15 kreutzers ». L'autre a répondu :

« Et si moi, j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 6 kreutzers et $\frac{2}{3}$». Combien d'œufs avait chaque paysanne ?

Solution

Soit x le nombre d'œufs qu'avait la première paysanne. La seconde en avait $100-x$. Si la première avait $100-x$ œufs elle aurait reçu, comme nous le savons, 15 kreutzers. Il en résulte que la première paysanne vendait les œufs au prix de $\frac{15}{100-x}$ la pièce.

De la même façon on trouve que la seconde paysanne vendait les œufs au prix de $\frac{20}{3}:x=\frac{20}{3x}$ la pièce.

Maintenant on peut déterminer les sommes reçues par chaque paysanne.

La première a reçu :

$$x\cdot\frac{15}{100-x}=\frac{15x}{100-x},$$

la seconde :

$$(100-x)\cdot\frac{20}{3x}=\frac{20\,(100-x)}{3x}.$$

Puisque les sommes reçues par les deux femmes sont les mêmes, on a :

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{20\,(100-x)}{3x}.$$

Après transformations, on a :

$$x^2+160x-8000=0,$$

d'où

$$x_1=40,\quad x_2=-200.$$

La racine négative, ici, n'a pas de sens, et le problème n'a qu'une solution : la première paysanne a vendu 40 œufs, et par suite, la seconde en a vendu 60.

Ce problème peut être résolu par une autre méthode beaucoup plus courte et plus élégante, mais plus difficile à trouver.

Supposons que la seconde paysanne avait k fois plus d'œufs que la première. Elles ont reçu les mêmes sommes ; cela veut dire que la première paysanne vendait ses œufs k fois plus cher que la seconde. Si elles avaient échangé leurs œufs avant la vente, la première aurait eu k fois plus d'œufs, qu'elle aurait vendus k fois plus cher. Elle aurait donc reçu k^2 fois plus d'argent que la seconde. Par suite, nous avons :

$$k^2 = 15 : \frac{20}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4};$$

d'où

$$k = \frac{3}{2}.$$

Il ne reste qu'à prendre les $\frac{3}{2}$ de 100 œufs, et on trouve immédiatement que la première paysanne avait 40 œufs et la seconde 60.

Les haut-parleurs

Problème

Deux groupes de haut-parleurs comprenant respectivement deux et trois appareils sont installés sur une place. La distance entre ces groupes est de 50 *m*. Où faut-il se placer pour que les sons émis par les deux groupes de haut-parleurs arrivent avec la même intensité ?

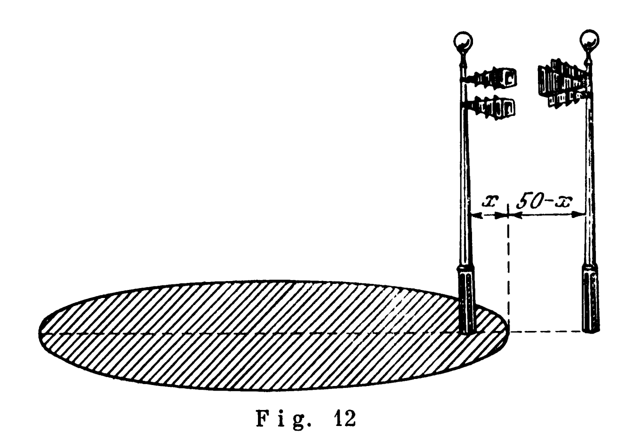


Fig. 12

Solution

Si l'on désigne par x la distance qui sépare le point cherché du plus petit groupe de haut-parleurs, la distance du plus grand groupe sera $50-x$ (fig. 12). Sachant que l'intensité du son diminue proportionnellement au carré de la distance, nous avons l'équation

$$\frac{2}{3}=\frac{x^2}{(50-x)^2}$$

qui après simplification prend la forme

$$x^2+200x-5000=0.$$

Cette équation a pour racines :

$$x_1=22,5,$$
$$x_2=-222,5.$$

La racine positive répond directement à la question posée. Le point d'égale perception est situé à 22,5 *m* du groupe comprenant deux haut-

parleurs et par suite, à 27,5 *m* du groupe de trois haut-parleurs.

Mais que signifie la racine négative de l'équation ? A-t-elle un sens ?

Certainement, le signe moins signifie qu'un second point d'égale perception se trouve dans une direction *opposée* à celle qui a été adoptée comme positive lorsqu'on a posé l'équation.

En mesurant dans cette direction 222,5 *m* depuis l'emplacement des deux appareils, on trouve un point où les sons des deux groupes de haut-parleurs arrivent avec la même intensité. Ce point se trouve à une distance de $222{,}5\ m + 50\ m = 272{,}5\ m$ du groupe de trois haut-parleurs.

Ainsi nous avons trouvé deux points d'égale intensité des sons sur la droite réunissant les sources sonores. Il n'y en a pas d'autres sur cette droite, mais il y en a hors d'elle. On peut démontrer que le lieu géométrique des points qui répondent à l'énoncé est une circonférence passant par les deux points trouvés, ceux-ci constituant les extrémités d'un diamètre. Cette circonférence limite une aire assez grande (hachurée sur le dessin) à l'intérieur de laquelle l'intensité des sons émis par le groupe de deux haut-parleurs est supérieure à celle des sons émis par le groupe de 3 haut-parleurs. Au-delà du cercle on constate un phénomène inverse.

L'algèbre d'un voyage sur la Lune

Le problème précédent est très voisin de celui de l'envoi d'une fusée sur la Lune. On sait que la Lune est vue sous un angle de 30′ à peine, et bien des gens pensèrent qu'il est impossible d'atteindre à coup sûr un but aussi petit. Or, un examen

plus détaillé du problème montre qu'il suffit que la fusée parvienne à dépasser le point où l'attraction terrestre et celle de la Lune sont les mêmes. Au-delà, la fusée continuera inévitablement son vol vers la Lune sous l'influence de l'attraction de celle-ci. Cherchons ce point d'égale attraction.

Selon la loi de Newton, la force d'attraction mutuelle de deux corps est directement proportionnelle au produit des masses de ces corps et inversement proportionnelle au carré de la distance entre eux. Si M est la masse de la Terre et x la distance de la fusée à la Terre, la force avec laquelle la Terre attire chaque gramme de la fusée est $\frac{Mk}{x^2}$, où k est la force d'attraction mutuelle d'un gramme par un autre gramme à la distance d'un centimètre.

La force avec laquelle la Lune attire chaque gramme de la fusée au même point est égale à

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

où m est la masse de la Lune et l sa distance à la Terre (on suppose que la fusée se trouve sur la droite qui réunit les centres de la Terre et de la Lune). Il faut que

$$\frac{Mk}{x^2}=\frac{mk}{(l-x)^2}$$

ou encore :

$$\frac{M}{m}=\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}.$$

L'astronomie nous enseigne que le rapport $\frac{M}{m}$ est approximativement égal à 81,5 ; on a donc ;

$$\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}=81{,}5,$$

d'où

$$80{,}5x^2 - 163{,}0lx + 81{,}5l^2 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à x on obtient :

$$x_1 = 0{,}9l \text{ et } x_2 = 1{,}12l.$$

De même que dans le problème des haut-parleurs, nous trouvons deux points sur la droite Terre-Lune où la fusée doit subir la même attraction ; un de ces points est situé à 0,9 fois la distance de la Terre à la Lune, et l'autre à 1,12 fois. Or, puisque $l \approx 384\,000$ km, un des points cherchés se trouve à 346 000 kilomètres du centre de la Terre et l'autre à 430 000 km.

Mais nous savons (voir le problème précédent) que tous les points de la circonférence passant par les deux points trouvés possèdent la même propriété. Si l'on fait tourner cette circonférence autour de la droite réunissant les centres de la Terre et de la Lune, elle décrira une surface sphérique dont tous les points satisferont aux conditions du problème.

Le diamètre de cette sphère sera

$$1{,}12l - 0{,}9l = 0{,}22l \approx 84\,000 \text{ km}.$$

Si la fusée se trouve à l'intérieur de cette sphère où l'attraction de la Lune est plus forte que celle de la Terre, elle atteindra inévitablement la surface de la Lune, si sa vitesse n'est pas trop grande (fig. 13).

Remarquons qu'ici encore, l'équation a été plus prévoyante que son auteur. Avez-vous pensé en abordant le problème que l'attraction terrestre est supérieure à celle de la Lune non seulement en avant de celle-ci, mais également

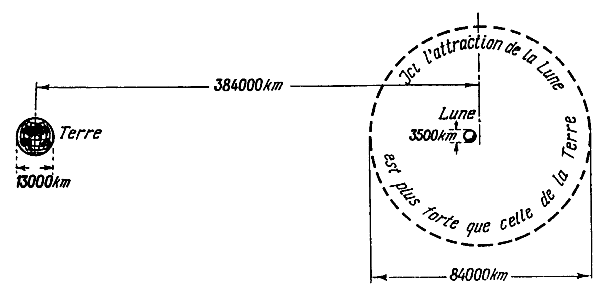


Fig. 13

en arrière ? L'analyse algébrique a permis de découvrir cette circonstance et a aidé à séparer exactement les sphères de leur influence.

« Un problème difficile »

Le tableau de Bogdanov-Belski « Un problème difficile » (1895) est très connu, mais peu de gens, sans doute, se sont aperçus qu'il pose effectivement un problème difficile. Il s'agit de trouver rapidement, par calcul mental, le résultat de l'opération :

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

En effet, le problème n'est pas facile. Cependant, les élèves de l'instituteur qui figure sur le tableau savaient bien résoudre de semblables problèmes. Il s'agit de S. Ratchinski, professeur de sciences naturelles, qui avait abandonné sa chaire à l'Université pour devenir un simple instituteur dans une école rurale. Ce pédagogue de talent cultivait dans son école le calcul mental, fondé sur une utilisation judicieuse des pro-



Fig. 14

priétés des nombres. Les nombres 10, 11, 12, 13 et 14 possèdent une propriété intéressante :

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

Mais puisque $100+121+144=365$, il est facile de calculer mentalement que l'expression qui figure sur ce tableau est égale à 2.

L'algèbre nous permet d'élargir ce problème : la suite 10, 11, 12, 13, 14 est-elle la seule suite de 5 nombres consécutifs où la somme des carrés des trois premiers nombres est égale à la somme des carrés des deux derniers ?

Solution

En désignant par x le premier des nombres cherchés, on a l'équation

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2.$$

Il est plus commode cependant de désigner par x non le premier, mais le *deuxième* des nombres cherchés. L'équation aura alors la forme plus simple :

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=(x+2)^2+(x+3)^2.$$

En simplifiant, on obtient :

$$x^2-10x-11=0,$$

d'où

$$x=5\pm\sqrt{25+11},\quad x_1=11 \quad \text{et} \quad x_2=-1.$$

Il existe donc *deux* suites de nombres qui possèdent la propriété requise : la suite de Ratchinski 10, 11, 12, 13, 14
et la suite

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2.$$

En effet

$$(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2.$$

Quels sont ces nombres ?

Problème

Trouver trois nombres consécutifs tels que le carré du nombre moyen soit supérieur d'une unité au produit des deux autres.

Solution

Soit x le premier de ces nombres ; l'équation sera de la forme

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1.$$

En éliminant les parenthèses on obtient l'égalité

$$x^2+2x+1 = x^2+2x+1,$$

qui ne permet pas de déterminer la valeur de x. Cela signifie que l'égalité que nous avons établie est une *identité* ; elle est vraie pour une valeur *quelconque* de l'inconnue, et non pas seulement pour *certaines* valeurs, comme dans le cas d'une équation. Cela veut dire que *tout groupe* de trois nombres consécutifs possède cette propriété. En effet, prenons au hasard les nombres 17, 18, 19. On voit facilement que

$$18^2-17\cdot 19 = 324-323 = 1.$$

La nécessité de cette relation devient plus claire lorsqu'on désigne par x le *deuxième* nombre. On a alors l'égalité

$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

qui est une identité évidente.

CHAPITRE VII

MAXIMUMS ET MINIMUMS

Les problèmes traités dans ce chapitre appartiennent à un genre très intéressant, où il s'agit de trouver la valeur maximum ou minimum d'une certaine grandeur. Ils peuvent être résolus par différentes méthodes. Nous allons en indiquer une.

Les deux trains

Problème

Deux voies ferrées se croisent à angle droit. Deux trains roulent vers le croisement : l'un, parti d'une gare située à 40 km du croisement fait 800 *m* par minute, et l'autre, parti d'une gare située à 50 km du croisement, fait 600 *m* par minute.

Au bout de combien de minutes les locomotives se trouveront-elles à une distance minimum l'une de l'autre, et quelle est cette distance ?

Solution

Traçons le schéma du mouvement de deux trains. Les droites *AB* et *CD* représentent les deux voies qui se croisent au point *O* (fig. 15). La gare *B* se trouve à 40 km de *O* et la gare *D* à

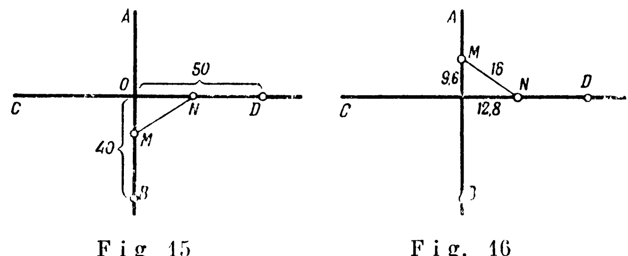


Fig 15 Fig. 16

50 km. Supposons qu'après x minutes les locomotives se trouvent à la distance minimum $m=MN$ l'une de l'autre. Le train parti de B a parcouru à ce moment la distance $BM=0,8x$, puisqu'il faut 0,8 km en 1 minute. Par suite, $OM=40-0,8x$. De la même façon on trouve que $ON=50-0,6x$. D'après le théorème de Pythagore :

$$MN=m=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{(40-0,8x)^2+(50-0,6x)^2}.$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation

$$m=\sqrt{(40-0,8x)^2+(50-0,6x)^2},$$

il vient après simplification :

$$x^2-124x+4100-m^2=0.$$

En résolvant cette équation par rapport à x on trouve :

$$x=62\pm\sqrt{m^2-256}.$$

Puisque x, c'est-à-dire le nombre de minutes écoulées, ne peut pas être imaginaire, il en résulte que m^2-256 doit être positif ou au moins égal à 0. Ce dernier cas correspond à la valeur *minimum* de m et on a alors

$$m^2=256, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad m=16.$$

Il est évident que m ne peut pas être inférieur à 16, sinon x serait imaginaire. Et si $m^2-256=0$, alors $x=62$.

Les locomotives se trouvent donc à une distance minimum l'une de l'autre au bout de 62 minutes, et cette distance est de 16 km.

Cherchons comment elles sont placées à ce moment. Calculons la longueur OM ; elle est égale, à

$$40-62\cdot 0{,}8=-9{,}6.$$

Le signe « moins » signifie que la première locomotive a dépassé le croisement de 9,6 km. Par contre, la distance ON est égale à

$$50-62\cdot 0{,}6=12{,}8,$$

c'est-à-dire que la deuxième locomotive se trouve encore à 12,8 km du croisement. La disposition des locomotives est représentée sur la fig. 16. Comme on le voit, elle n'est pas telle que nous l'avions pensée avant de résoudre le problème. Mais l'équation s'est montrée assez tolérante, et nous a fourni une solution juste malgré un schéma incorrect. Il n'est pas difficile de comprendre d'où vient cette tolérance : elle est due aux règles algébriques concernant les signes.

Où faut-il placer l'arrêt du train ?

Problème

A 20 km d'une section rectiligne de la voie ferrée se trouve le village B (fig. 17). Où faut-il placer un arrêt C pour que le voyage de A à B par la voie ferrée AC et par la route CB prenne le temps minimum ? La vitesse des trains est égale à 0,8 km par minute, et la vitesse des transports routiers à 0,2 km par minute.

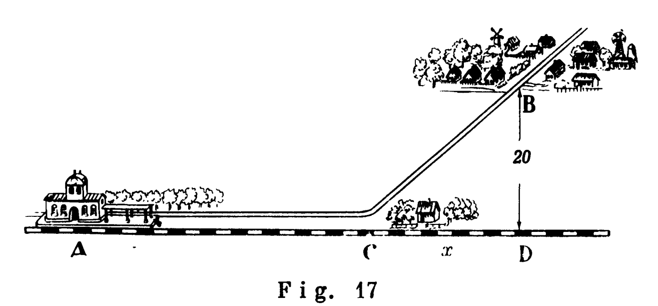


Fig. 17

Solution

Désignons par a la distance AD (de A jusqu'à la base de la perpendiculaire BD sur AD) et par x la distance CD. On a alors

$$AC = AD - CD = a - x$$

et

$$CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}.$$

Le temps mis par le train pour parcourir AC est :

$$\frac{AC}{0,8} = \frac{a - x}{0,8}.$$

Le temps nécessaire pour parcourir le trajet CB par la route est

$$\frac{CB}{0,2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

La durée totale du voyage de A à B est donc égale à

$$\frac{a - x}{0,8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0,2}.$$

Cette somme que nous désignerons par m doit être minimum.

L'équation

$$\frac{a-x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}=m$$

peut être mise sous la forme

$$-\frac{x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}=m-\frac{a}{0,8}.$$

En multipliant par 0,8, on a :

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0,8m-a.$$

En désignant $0,8m-a$ par k et en débarrassant l'équation de son radical on obtient une équation de second degré

$$15x^2-2kx+6400-k^2=0,$$

d'où

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16k^2-96\,000}}{15}.$$

Puisque $k=0,8m-a$, lorsque m est minimum, k devient aussi minimum et réciproquement *. Mais pour que x ait une valeur réelle, il faut que $16k^2$ ne soit pas inférieur à 96 000. Il s'ensuit que la valeur minimum de $16k^2$ est 96 000. Pour cette raison m devient minimum quand

$$16k^2=96\,000,$$

d'où

$$k=\sqrt{6000}$$

et par suite

$$x=\frac{k\pm 0}{15}=\frac{\sqrt{6000}}{15}\approx 5,16.$$

---

* Il ne faut pas oublier que $k>0$, puisque

$$0,8m=a-x+4\sqrt{x^2+20^2}>a-x+x=a.$$

L'arrêt doit être placé à environ 5 km du point D, quelle que soit la longueur de $a=AD$. Evidemment, notre solution n'a un sens que pour $x<a$, puisque en posant l'équation nous avons considéré l'expression $a-x$ comme un nombre positif.

Si $x=a\approx 5{,}16$, il ne sera pas nécessaire de placer un arrêt entre A et D, et la route devra partir directement de la gare. Il en sera de même si la distance a est inférieure à 5,16 km.

Cette fois nous sommes plus prévoyants que l'équation. Si nous avions une confiance absolue en l'équation, il nous faudrait, dans le cas considéré, placer l'arrêt en deçà de la gare, ce qui serait un non-sens évident : dans ce cas $x>a$, et le temps $\frac{a-x}{0{,}8}$ durant lequel il faut voyager en chemin de fer serait négatif. Cet exemple montre que lorsqu'on utilise l'appareil mathématique, il faut faire attention aux résultats obtenus. Il faut toujours se rappeler que ceux-ci peuvent perdre toute signification réelle si les conditions sur lesquelles on a fondé l'emploi de notre appareil mathématique ne sont pas remplies.

Comment tracer la route ?

Problème

De la ville A située sur la rive d'un fleuve, il faut expédier des marchandises vers la localité B située à a kilomètres en aval et à d km de la rive (fig. 18). Comment faut-il tracer une route de B jusqu'au fleuve pour que le coût du transport de A à B soit minimum, sachant que le prix de la tonne kilométrique par le fleuve est deux fois moindre que par la route ?

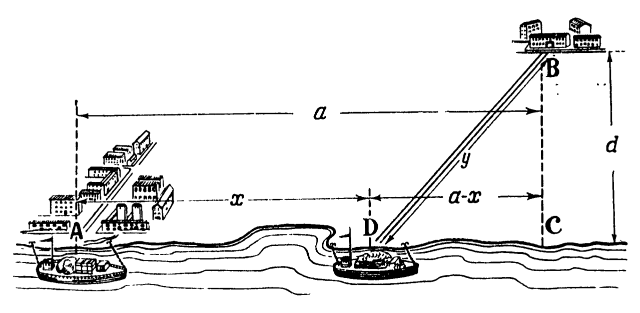


Fig. 18

Solution

Désignons par x la distance AD et par y la longueur DB de la route. Par définition, la longueur AC est égale à a et la longueur BC est égale à d.

Puisque le transport par route coûte deux fois plus cher que par voie fluviale, la somme

$$x+2y$$

doit être minimum selon l'énoncé du problème. Désignons cette valeur minimum par m. Nous avons l'équation

$$x+2y=m.$$

Mais $x=a-DC$ et $DC=\sqrt{y^2-d^2}$; notre équation prend alors la forme :

$$a-\sqrt{y^2-d^2}+2y=m$$

soit, en nous débarrassant du radical :

$$3y^2-4(m-a)y+(m-a)^2+d^2=0.$$

Résolvons-la :

$$y=\frac{2}{3}(m-a)\pm\frac{1}{3}\sqrt{(m-a)^2-3d^2}.$$

Pour que y soit réel il faut que $(m-a)^2$ ne soit pas inférieur à $3d^2$. La valeur minimum de $(m-a)^2$ est donc $3d^2$, et on a alors

$$m-a=d\sqrt{3}, \qquad y=\frac{2(m-a)+0}{3}=\frac{2d\sqrt{3}}{3}$$

sin $\angle BCD=d:y$, c'est-à-dire :

$$\sin \angle BDC=\frac{d}{y}=d:\frac{2d\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mais l'angle dont le sinus est égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est égal à 60°. Il en résulte que la route doit faire un angle de 60° avec le fleuve, quelle que soit la distance AC.

Il faut faire ici la même remarque que dans le problème précédent : la solution n'a un sens que dans certaines conditions. Si la localité B est située de telle sorte qu'en traçant la route sous un angle de 60° par rapport au fleuve celle-ci passe en deçà de la ville A, la solution est inacceptable ; dans ce cas, la route doit relier directement B et A et le transport par le fleuve devient inutile.

Maximum d'un produit

Pour résoudre de nombreux problèmes « de maximum et de minimum », c'est-à-dire où il s'agit de trouver la valeur maximum et la valeur minimum d'une grandeur variable, on peut utiliser un théorème algébrique que nous allons voir maintenant.

Considérons le problème suivant :

Diviser un nombre en deux parties telles que le produit de celles-ci soit maximum.

Solution

Soit a le nombre donné. Divisons-le en deux parties que nous désignerons par

$$\frac{a}{2}+x \quad \text{et} \quad \frac{a}{2}-x\,;$$

le nombre x étant la valeur par laquelle ces deux parties diffèrent de la moitié de a. Le produit des deux parties est égal à

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2.$$

Il est évident que ce produit augmente quand x diminue, c'est-à-dire quand la différence entre les parties diminue. Le produit sera donc maximum pour $x=0$, autrement dit quand les deux parties seront égales chacune à $\frac{a}{2}$.

Ainsi, il faut diviser le nombre par 2 : le produit de deux nombres dont la somme reste constante est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

Considérons le même problème pour trois nombres :

Diviser un nombre en trois parties telles que le produit de celles-ci soit maximum.

Solution

Pour résoudre ce problème nous allons nous servir du problème précédent.

Soit a le nombre. Admettons d'abord qu'aucune des parties n'est égale à $\frac{a}{3}$. Il s'en trouvera alors une qui sera supérieure à $\frac{a}{3}$ (les 3 parties

ne peuvent être toutes inférieures à $\frac{a}{3}$) ; désignons-la par

$$\frac{a}{3}+x.$$

De la même façon on trouvera une partie inférieure à $\frac{a}{3}$; désignons-la par

$$\frac{a}{3}-y.$$

Les nombres x et y sont positifs. La troisième partie sera évidemment égale à

$$\frac{a}{3}+y-x.$$

Les nombres $\frac{a}{3}$ et $\frac{a}{3}+x-y$ ont la même somme que les deux premières parties du nombre a, et leur différence $x-y$ est inférieure à la différence des deux premières parties, qui était égale à $x+y$. Comme nous le savons d'après le problème précédent, il s'ensuit que le produit

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

est supérieur au produit des deux premières parties du nombre a.

Ainsi, si on remplace les deux premières parties du nombre a par les nombres

$$\frac{a}{3} \text{ et } \frac{a}{3}+x-y,$$

et si on laisse la troisième partie sans changement le produit augmentera.

Admettons que l'une des parties est égale à $\frac{a}{3}$. Alors les deux autres parties auront respec-

tivement la forme

$$\frac{a}{3}+z \quad \text{et} \quad \frac{a}{3}-z.$$

Si on fait les deux dernières parties égales à $\frac{a}{3}$ (ce qui ne fera pas changer leur somme), le produit augmentera de nouveau et sera égal à

$$\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^3}{27}.$$

Ainsi, lorsqu'on divise un nombre en trois parties inégales, le produit de celles-ci est inférieur à $\frac{a^3}{27}$, c'est-à-dire au produit de trois facteurs égaux dont la somme est égale à a.

De la même façon, on peut démontrer ce théorème pour 4 facteurs, 5 facteurs, etc.

Considérons maintenant un cas plus général.

Trouver pour quelles valeurs de x et de y l'expression $x^p y^q$ est maximum lorsque $x+y=a$.

Solution

Il faut trouver pour quelle valeur de x l'expression

$$x^p\cdot(a-x)^q$$

est maximum.

Multiplions cette expression par le nombre $\frac{1}{p^p q^q}$. On obtient une nouvelle expression

$$\frac{x^p\,(a-x)^q}{p^p\cdot q^q},$$

qui, évidemment, devient maximum en même temps que l'expression initiale.

Ecrivons l'expression obtenue sous la forme :

$$\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots}_{p \text{ fois}}\cdot\underbrace{\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdots}_{q \text{ fois}}$$

La somme de tous les facteurs de cette expression est égale à

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots}_{p \text{ fois}}+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\ldots}_{q \text{ fois}}=$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q\,(a-x)}{q}=x+a-x=a,$$

c'est-à-dire à une valeur constante.

Partant de ce qui a été démontré plus haut, (pages 180—183) nous déduisons que le produit

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdot\frac{a-x}{q}\cdots$$

est maximum lorsque tous ses facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}.$$

Sachant que $a-x=y$ on obtient la proportion

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

Ainsi le produit $x^p y^q$ (lorsque la somme $x+y$ est constante) est maximum pour $x:y=p:q$.

De la même façon on peut démontrer que les produits $x^p\,y^q\,z^r$, $x^p\,y^q\,z^r\,t^u$, etc. (les sommes $x+y+z$, $x+y+z+t$, etc. étant constantes) atteignent leur valeur maximum lorsque

$$x:y:z-p:q:r,\qquad x:y:z:t=p:q:r:u,\ \text{etc.}$$

Minimum d'une somme

A titre d'exercice, le lecteur peut essayer de démontrer les théorèmes suivants :

1. La somme de deux nombres dont le produit est constant est *minimum* lorsque ces deux nombres sont égaux.

Par exemple, pour le produit 36 : 4+9=13,3+ +12=15, 2+18=20, 1+36=37 et enfin 6+6=12.

2. La somme de plusieurs nombres dont le produit est constant est minimum lorsque ces nombres sont égaux.

Par exemple, pour le produit 216 : 3+12+ +6=21, 2+18+6=26, 9+6+4=19, tandis que 6+6+6=18.

Nous montrerons sur plusieurs exemples comment on utilise ces théorèmes dans la pratique.

Une poutre de volume maximum

Problème

On doit scier un tronc d'arbre cylindrique de façon à obtenir une poutre rectangulaire de volume maximum. De quelle forme doit être la section de cette poutre (fig. 19) ?

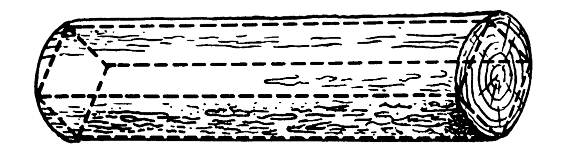


Fig. 19

Solution

Soit x et y les côtés du rectangle. On a alors, d'après le théorème de Pythagore

$$x^2+y^2=d^2$$

où d est le diamètre du tronc d'arbre. Le volume de la poutre est maximum lorsque l'aire de sa section est maximum, c'est-à-dire quand xy est maximum. Mais quand xy est maximum, le produit x^2y^2 est également maximum. Puisque la somme x^2+y^2 est constante, on voit d'après ce que nous venons de démontrer que le produit x^2y^2 est maximum si $x^2=y^2$, c'est-à-dire si $x=y$.

La poutre doit donc être de section *carrée.*

Les deux champs

Problèmes

1. Quelle doit être la forme d'un champ rectangulaire de surface donnée pour que la longueur de la clôture qui l'entoure soit minimum ?

2. Quelle doit être la forme d'un champ rectangulaire entouré d'une clôture de longueur donnée pour que sa surface soit maximum ?

Solution

1. La forme d'un champ rectangulaire est déterminée par la relation entre ses côtés x et y. La surface d'un champ dont les côtés sont x et y est égale à xy et la longueur de la clôture est $2x+2y$. La longueur de la clôture sera minimum lorsque la somme $x+y$ sera minimum.

Le produit xy étant constant, la somme $x+y$ est minimum lorsque $x=y$. Par suite, le rectangle cherché est un carré.

2. Si x et y sont les côtés du rectangle, la longueur de la clôture est $2x+2y$ et la surface du rectangle est xy. Ce produit est maximum lorsque le produit $4xy$, soit $2x \cdot 2y$, est maximum ; ce dernier produit, la somme de ses facteurs $2x+2y$ étant constante, devient maximum lorsque $2x$ est égal à $2y$, c'est-à-dire quand le champ a une forme carrée.

Aux propriétés du carré que nous avons apprises en étudiant la géométrie, nous pouvons ajouter celle-ci : de tous les rectangles, le carré possède le périmètre minimum pour une surface donnée et la surface maximum pour un périmètre donné.

Le cerf-volant

Problème

On veut donner à un cerf-volant ayant l'aspect d'un secteur circulaire une forme telle que sa surface soit maximum pour un périmètre donné. Quelle doit être la forme du secteur ?

Solution

Plus précisément, nous devons chercher une relation entre la longueur de l'arc du secteur et son rayon telle que sa surface ait une valeur maximum, le périmètre étant donné.

Soit x le rayon du secteur et y la longueur de l'arc ; le périmètre l et la surface S seront respectivement (fig. 20) :

$$l = 2x + y, \qquad S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l - 2x)}{2}.$$

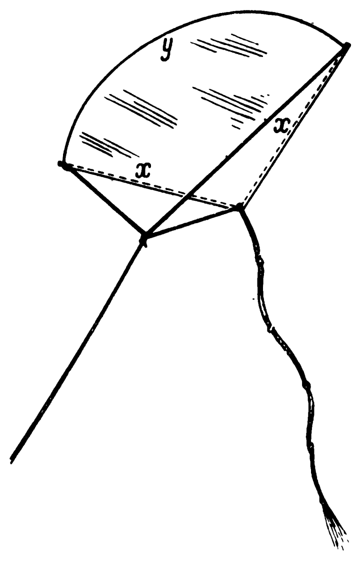


Fig. 20

S sera maximum pour la même valeur de x que le produit $2x\ (l-2x)$, c'est-à-dire le quadruple de la surface. Puisque la somme des facteurs $2x+(l-2x)=l$ est constante, leur produit sera maximum quand $2x=l-2x$, d'où :

$$x=\frac{l}{4},$$

$$y=l-2\cdot\frac{l}{4}=\frac{l}{2}.$$

Ainsi, pour un périmètre donné, la surface du secteur est maximum quand son rayon est égal à la moitié de la longueur de l'arc (autrement dit, quand la longueur de l'arc est égale à la somme des rayons, ou encore quand la longueur

de la partie courbe du périmètre est égale à la longueur de la partie brisée). L'angle du secteur $\approx 115°$ (2 radians). Quant aux qualités aérodynamiques d'un cerf-volant de cette forme, c'est une autre question dont nous ne nous occuperons pas ici.

La construction d'une maison

Problème

A la place d'une maison démolie dont un mur est resté debout, on veut en construire une nouvelle. La longueur du mur est de 12 *m*. La surface de la nouvelle maison doit être égale à 112 m^2. Quant aux prix des travaux ils sont les suivants :

1° La réparation d'un mètre courant de mur coûte 25% du prix de la construction d'un mur nouveau.

2° La démolition d'un mètre courant de vieux mur et la construction avec les matériaux obtenus d'un nouveau mur coûte 50% du prix de revient de la construction d'un mètre de mur avec des matériaux nouveaux.

Comment peut-on, dans ces conditions, utiliser de façon optimum le mur qui reste ?

Solution

Supposons qu'on garde x mètres du vieux mur, et qu'on démolit le reste, soit $12-x$ mètres, pour faire avec les briques obtenues une partie du mur de la nouvelle maison (fig. 21). Si a le coût de la construction d'un mètre de mur avec des matériaux nouveaux, la réparation de x mètres du vieux mur coûtera $\frac{ax}{4}$; la construction

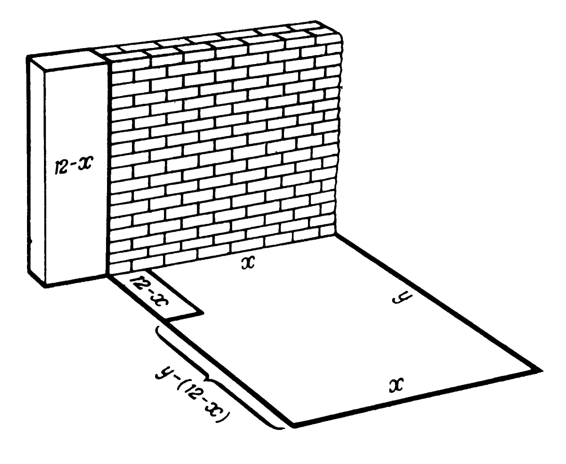


Fig. 21

d'un mur long de $(12-x)m$ coûtera $\frac{a(12-x)}{2}$; pour achever la construction du côté y il faudra bâtir $a[y-(12-x)]$, qui coûteront $a(y+x-12)$; enfin le prix du troisième mur sera ax et celui du quatrième ay. Le travail coûtera au total :

$$\frac{ax}{4}+\frac{a\,(12-x)}{2}+a\,(y+x-12)+ax+ay=$$
$$=\frac{a\,(7x+8y)}{4}-6a.$$

Cette expression sera minimum en même temps que la somme

$$7x+8y.$$

Nous savons que la surface de la maison $xy=$ $=112$; par suite

$$7x\cdot 8y=56\cdot 112.$$

A produit constant, la somme $7x+8y$ sera minimum lorsque

$$7x=8y,$$

d'où

$$y=\frac{7}{8}x.$$

En remplaçant y par cette expression dans l'équation $xy=112$, on a :

$$\frac{7}{8}x^2=112, \quad x=\sqrt{128}\approx 11,3.$$

Puisque la longueur du vieux mur est de 12 *m*, il suffit donc de démolir 0,7 *m* de celui-ci.

Un terrain pour une maison de campagne

Problème

Lors de la construction d'une maison de campagne, on avait à entourer le terrain d'une clôture. On disposait des matériaux pour l mètres courants de clôture. On pouvait disposer en outre d'une palissade construite auparavant et limitant un des côtés du terrain. Comment, dans ces conditions, clôturer un terrain rectangulaire de surface maximum ?

Solution

Soit x la longueur du terrain, c'est-à-dire le côté parallèle à la palissade, et y sa largeur, c'est-à-dire le côté perpendiculaire (fig. 22). On aura alors besoin de $x+2y$ mètres de clôture, de sorte que

$$x+2y=l.$$

La surface du terrain est :

$$S=xy=y\,(l-2y).$$

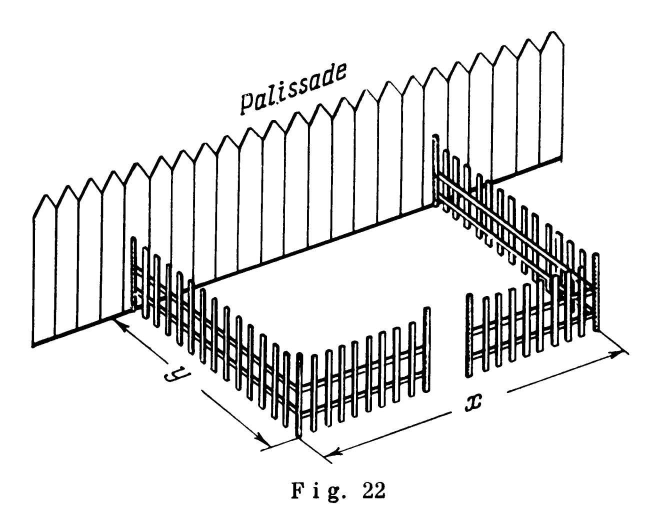


Fig. 22

S sera maximum en même temps que

$$2y = l - 2y,$$

(le double de la surface) qui est le produit de deux facteurs dont la somme l est constante. Pour obtenir la surface maximum il faut que

$$2y = (l - 2y)$$

d'où

$$y = \frac{l}{4}, \quad x = l - 2y = \frac{l}{2}.$$

Autrement dit, $x = 2y$: la longueur du terrain doit être double de sa largeur.

Auge de section maximum

Problème

Avec une feuille métallique rectangulaire (fig. 23) il faut fabriquer une auge dont la section ait la forme d'un trapèze isocèle. On peut le

faire de plusieurs façons, comme le montre la fig. 24. Quels doivent être la largeur des bandes latérales et l'angle qu'elles forment avec la base pour que la section de l'auge ait la surface maximum (fig. 25) ?

Solution

Soit l la largeur de la tôle, x la largeur des bandes latérales et y celle de la base. Introduisons encore une inconnue z, représentée sur la fig. 26.

La surface du trapèze (section de l'auge) est :

$$S=\frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2}=\sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}.$$

Le problème a été réduit à la détermination des valeurs de x, y et z pour lesquelles S est maximum ; la somme $2x+y$ (c'est-à-dire la largeur de la tôle) garde une valeur constante l. De l'équation ci-dessus on tire :

$$S^2=(y+z)^2(x+z)(x-z).$$

La grandeur S^2 devient maximum pour les mêmes valeurs de x, y et z que $3S^2$, qu'on peut écrire sous la forme du produit

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z).$$

La somme de ces quatre facteurs est :

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z=2y+4x=2l,$$

c'est-à-dire une constante. Par suite, le produit de ces quatre facteurs est maximum quand ils sont égaux, autrement dit, quand

$$y+z=x+z \quad \text{et} \quad x+z=3x-3z.$$

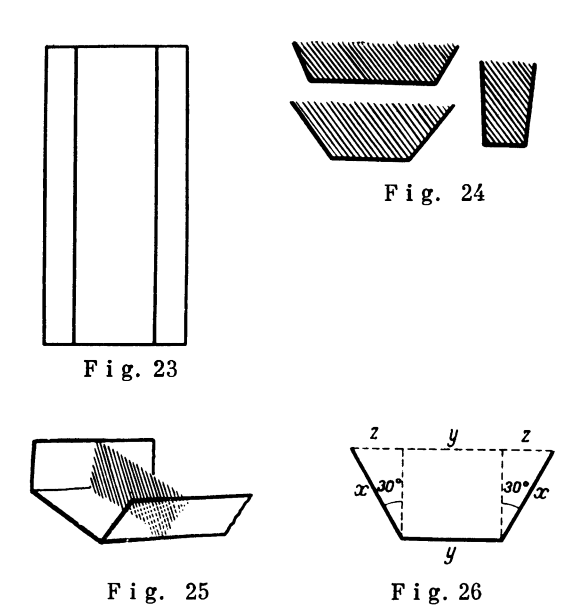


Fig. 23

Fig. 24

Fig. 25

Fig. 26

La première égalité donne

$$y = x$$

et puisque $y + 2x = l$, on a $x = y = \frac{l}{3}$.

De la deuxième égalité on tire

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}.$$

Enfin, puisque le côté z est égal à la moitié de l'hypoténuse (fig. 26), l'angle opposé à ce côté est égal à 30°, et l'angle formé par les côtés et le fond de l'auge est égal à $90° + 30° = 120°$.

Ainsi l'auge aura la section maximum si ses parois constituent trois côtés contigus d'un hexagone régulier.

La capacité maximum d'un entonnoir

Problème

Avec un disque en fer-blanc il faut fabriquer un entonnoir, en découpant un secteur de ce disque et en pliant le reste en forme de cône (fig. 27). Quel doit être, en degrés, l'arc du secteur découpé pour que le cône soit de capacité maximum ?

Solution

Soit x la longueur de l'arc de la partie du disque qui est pliée pour former le cône. Par suite, le rayon R du disque en fer-blanc sera la génératrice du cône et la circonférence de base aura pour longueur x. Le rayon r de la base du cône est donné par l'égalité

$$2\pi r = x,$$

d'où

$$r = \frac{x}{2\pi}.$$

La hauteur du cône est, d'après le théorème de Pythagore,

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

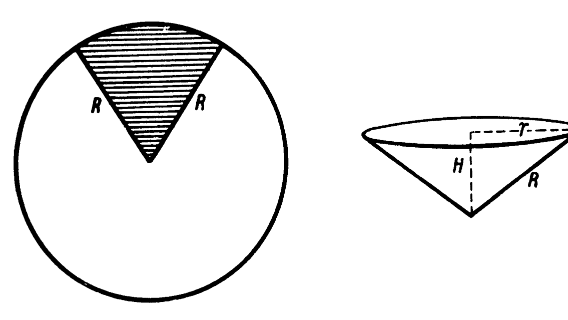


Fig. 27

(fig. 27). Le volume de ce cône est

$$V=\frac{\pi}{3}r^2H=\frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}\,.$$

Cette expression devient maximum en même temps que l'expression

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

et que son carré :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]$$

Puisque

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=R^2$$

est constant, le dernier produit (selon ce qui a été démontré pages 183-184) est maximum pour une valeur de x telle que :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2:\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]=2:1,$$

d'où

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=2R^2-2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=2R^2 \quad \text{et} \quad x=\frac{2\pi}{3}R\sqrt{6}\approx 5{,}15R.$$

L'arc de x en degrés est égal approximativement à 295° et par suite, l'arc du secteur à découper doit contenir $\approx$65°.

Le plus fort éclairage

Problème

A quelle hauteur au-dessus de la table doit se trouver la flamme d'une bougie pour qu'elle éclaire au maximum une pièce de monnaie posée sur la table ?

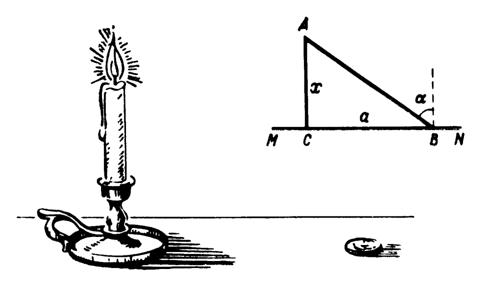


Fig. 28

Solution

On peut penser que pour obtenir le meilleur éclairage, il faut placer la flamme aussi bas que possible. Or, il n'en est rien. Lorsque la flamme est placée très bas, l'angle d'incidence des rayons est très grand. Si on élève la bougie de façon que cet angle soit petit, on éloigne la source de lumière. Le meilleur éclairage sera donc donné par une certaine hauteur moyenne de la flamme au-dessus de la table, que nous appellerons x (fig. 28). Soit a la distance BC de la pièce B à la base C de la perpendiculaire passant par la flamme A. Si i est la brillance de la flamme, l'éclairement de la pièce, selon les lois de l'optique, sera :

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

où α est l'angle d'incidence du faisceau de rayons AB. Puisque

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

l'éclairement sera

$$\frac{i}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette expression est maximum pour la même valeur de x que son carré, c'est-à-dire

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}$$

Négligeons le facteur i^2 qui est constant et transformons le reste de l'expression de la façon suivante :

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}=\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right).$$

L'expression transformée est maximum en même temps que

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

puisque le facteur constant a^4 introduit n'influe pas sur la valeur de x pour laquelle le produit est maximum. En remarquant que la somme des premières puissances de ces facteurs

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}+\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=1$$

est constante, nous en déduisons que le produit considéré devient maximum quand

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}:\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=2:1$$

(voir pages 183-184).

Nous avons donc l'équation

$$a^2=2x^2+2a^2-2a^2$$

qui donne

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\approx 0{,}71a.$$

CHAPITRE VIII

PROGRESSIONS

Une progression très ancienne

Problème

Le plus ancien problème sur les progressions n'est pas le problème de la récompense de l'inventeur des échecs, vieux de 2 000 ans, mais un autre problème, sur la division du pain, inscrit dans le célèbre papyrus égyptien de Rhind. Ce papyrus, trouvé par Rhind à la fin du siècle dernier et écrit 2 000 ans avant n. è., est une copie d'un ouvrage mathématique encore plus ancien qui date probablement du troisième millénaire avant n. è. Parmi les problèmes d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie qui y figurent, on trouve celui-ci :

Partager 100 boisseaux de blé entre cinq personnes de la façon suivante : la deuxième recevra en plus de la première autant que la troisième recevra en plus de la deuxième, que la quatrième recevra en plus de la troisième et que la cinquième recevra en plus de la quatrième. En outre, les deux premières personnes doivent avoir ensemble 7 fois moins de blé que les trois autres. Combien faut-il donner de blé à chaque personne ?

Solution

Il est évident que les quantités de blé reçues par les cinq personnes forment une progression arithmétique croissante. Soit x le premier terme

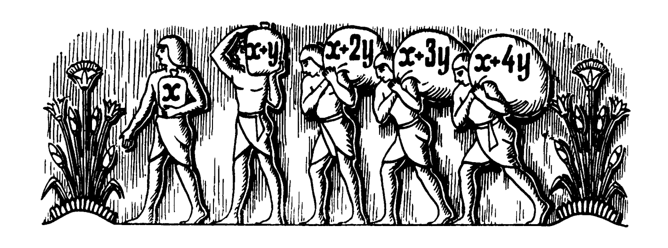


Fig. 29

de cette progression et y la raison. Dans ce cas

la part de la première personne est . . x
» » » » deuxième » » . . $x+y$
» » » » troisième » » . . $x+2y$
» » » » quatrième » » . . $x+3y$
» » » » cinquième » » . . $x+4y$.

L'énoncé du problème nous donne les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7\,[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y). \end{cases}$$

Après simplification, la première équation devient :

$$x+2y=20$$

et la seconde :

$$11x=2y.$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$x=\frac{5}{3}, \qquad y=\frac{55}{6}.$$

Les parts de blé sont donc les suivantes :

1 boisseau $\frac{2}{3}$, 10 b. $\frac{5}{6}$, 20 b., 29 b. $\frac{1}{6}$ et 38 b. $\frac{1}{3}$.

L'algèbre sur le papier quadrillé

Bien que ce problème date d'environ 5 000 ans, les progressions ne figurent dans les manuels scolaires que depuis relativement peu de temps. Dans le manuel de Magnitski édité il y a deux siècles et qui, pendant 50 ans environ, est resté le principal manuel des écoles russes, les progressions figurent, mais les relations générales entre leurs termes sont absentes. L'auteur lui-même venait difficilement à bout de ces problèmes. Pourtant, il est facile de trouver la somme des termes d'une progression arithmétique à l'aide d'une feuille de papier quadrillé. Une progression arithmétique quelconque y est représentée par une figure en escalier. Par exemple, le dessin *ABDC* sur la figure 30 présente la progression :

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14.$$

Pour déterminer la somme de ses termes, achevons le dessin pour obtenir le rectangle *ABGE*. Nous avons alors deux figures égales, *ABDC* et *DGEC*. La surface de chacune d'elles

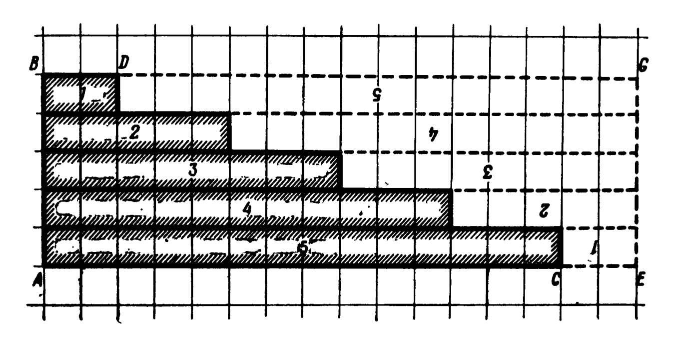


Fig. 30

représente la somme des termes de la progression. Il en résulte que le double de la somme est égal à la surface du rectangle $ABGE$, c'est-à-dire à

$$(AC+CE)\cdot AB.$$

Mais $AC+CE$ représente la somme du premier et du cinquième terme de la progression ; AB est le nombre de termes. Par conséquent :

$$2S = \text{(somme des termes extrêmes)} \cdot \text{(nombre de termes)}$$

ou

$$S = \frac{\text{(premier + dernier terme)} \cdot \text{(nombre de termes)}}{2}.$$

L'arrosage d'un jardin potager

Problème

Dans un jardin potager il y a 30 plates-bandes de 16 *m* de longueur et de 2,5 *m* de largeur chacune. Pour arroser les plates-bandes, le jardinier apporte des seaux d'eau d'un puits situé à 14 *m* du jardin (fig. 31). Il doit contourner les plates-bandes, en passant par les allées, et l'eau qu'il



Fig. 31

apporte à chaque voyage ne permet d'arroser qu'une plate-bande.

On demande le chemin parcouru par le jardinier pour arroser le jardin entier, le trajet commençant et finissant près du puits.

Solution

Pour arroser la première plate-bande, le jardinier doit parcourir

$$14+16+2{,}5+16+2{,}5+14=65 \text{ mètres.}$$

Pour arroser la deuxième plate-bande, il parcourt

$$14+2{,}5+16+2{,}5+16+2{,}5+2{,}5+14=$$
$$=65+5=70 \text{ mètres.}$$

Et chacune des plates-bandes suivantes allonge son chemin de 5 *m*. Nous avons donc la progression : 65 ; 75 ; ... ; $65+5\cdot 29$.

La somme des termes de cette progression est

$$\frac{(65+65+29\cdot 5)\,30}{2}=4125 \text{ mètres.}$$

Le chemin parcouru par le jardinier est de 4 *km* 125 *m*.

La nourriture des poules

Problème

Pour 31 poules, on a préparé une certaine quantité de nourriture, à raison d'un décalitre par semaine et par poule, en supposant que le nombre de poules resterait le même. Or en fait, ce nombre a diminué chaque semaine d'une unité, de sorte que la nourriture préparée s'est trouvée suffisante pour une durée de temps double.

Quelle quantité de nourriture avait-on préparé et pour combien de temps ?

Solution

Supposons qu'on avait préparé x décalitres de nourriture pour y semaines, puisque la nourriture a été prévue pour 31 poules à raison d'un décalitre par poule et par semaine, on a :

$$x = 31y.$$

La première semaine on a dépensé 31 dal, la deuxième 30 dal, la troisième 29, etc. jusqu'à la dernière semaine d'un temps double du délai prévu, où on a dépensé :

$$(31 - 2y + 1) \text{ dal } *.$$

On avait donc préparé en tout :

$$x = 31y = 31 - 30 + 29 + \ldots\ldots + (31 - 2y + 1).$$

La somme des $2y$ termes de la progression, dont le premier est 31 et le dernier $31-2y+1$, est :

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)\, 2y}{2} = (63 - 2y)\, y.$$

Puisque y ne peut être nul, nous avons le droit de diviser les deux membres de l'égalité par y, ce qui donne :

$$31 = 63 - 2y \quad \text{et} \quad y = 16,$$

d'où

$$x = 31y = 496.$$

On avait donc préparé 496 décalitres de nourriture pour 16 semaines.

---

* La consommation de nourriture a été :

pendant la 1re semaine : 31 dal.
pendant la 2e semaine : 31—1 dal.
pendant la 3e semaine : 31—2 dal.

. . . .

pendant la $2y$^e^ semaine : $31-(2y-1) = 31-2y+1$ décalitres.

Une équipe de terrassiers

Problème

Une équipe de terrassiers s'est engagée à creuser une tranchée. Si elle avait travaillé au complet, la tranchée aurait été creusée en 24 heures. Mais en fait, un seul terrassier a commencé le travail. Au bout d'un certain temps un deuxième l'a rejoint ; au bout du même temps un troisième est arrivé, puis un quatrième, et ainsi de suite, jusqu'au dernier. Le calcul de la paie a montré que le premier terrassier avait travaillé 11 fois plus de temps que le dernier.

Combien de temps a travaillé le dernier terrassier ?

Solution

Admettons que le dernier terrassier ait travaillé x heures. Le premier a alors travaillé $11x$ heures. Si y est le nombre des ouvriers de l'équipe, le nombre total d'heures de travail sera la somme des y termes d'une progression arithmétique décroissante, dont le premier terme est $11x$ et le dernier x, c'est-à-dire :

$$\frac{(11x+x)\,y}{2}=6xy.$$

D'autre part, nous savons que les y terrassiers travaillant ensemble auraient creusé la tranchée en 24 heures. Le nombre total d'heures de travail est donc aussi égal à $24y$. Par suite

$$6xy=24y.$$

Le nombre y n'étant pas nul, nous pouvons écrire :

$$6x=24 \quad \text{d'où} \quad x=4.$$

Ainsi, le dernier terrassier a travaillé 4 heures.

Nous avons répondu à la question posée dans l'énoncé ; mais il est impossible de savoir combien d'ouvriers il y avait dans l'équipe, bien que ce nombre figure dans l'équation, désigné par y : les données du problème sont insuffisantes.

Les pommes

Problème

Un jardinier a vendu à son premier client la moitié de ses pommes plus une demi-pomme, au deuxième client la moitié du reste plus une demi-pomme, au troisième client la moitié du reste plus une demi-pomme, etc., jusqu'au septième client, après lequel il ne restait plus de pommes.

Combien de pommes avait le jardinier ?

Solution

Si le jardinier avait x pommes, le premier client a reçu :

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

le deuxième :

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2},$$

le troisième :

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3},$$

et le septième client a reçu :

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

On a l'équation

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

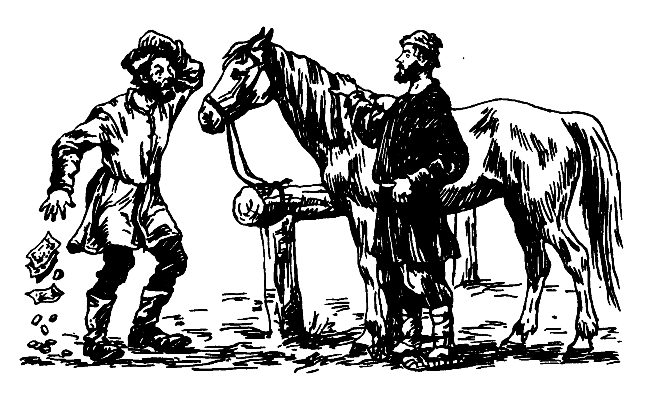


Fig. 32

ou

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=x.$$

En calculant la somme des termes de la progression géométrique entre parenthèses on obtient :

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7} \quad \text{et} \quad x=2^7-1=127.$$

Le jardinier avait 127 pommes.

L'achat d'un cheval

Problème

Dans le vieux cours d'arithmétique de Magnitski, on trouve un problème amusant, que voici :

Un maquignon a vendu un cheval pour 156 roubles, mais l'acheteur est revenu sur son idée et a rendu le cheval au vendeur en lui disant : « Je ne le prends pas : 156 roubles, c'est trop cher pour ce canasson. »

Alors le maquignon a proposé à son client d'autres conditions :

« Si vous trouvez le cheval trop cher, alors achetez les clous de ses fers. Quant à la bête, vous l'aurez gratuitement, en supplément. A chaque fer il y a 6 clous. Pour le premier clou donnez-moi un quart de kopeck, pour le deuxième un demi-kopeck, pour le troisième un kopeck, etc. »

L'acheteur, tenté par le bas prix et la possibilité d'avoir le cheval gratuitement, a accepté ces conditions, pensant qu'il n'en aurait pas pour plus de 10 roubles.

De combien l'acheteur s'est-il trompé ?

Solution

Pour 24 clous il devait payer :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{24-3} \text{ kopecks.}$$

Cette somme est égale à

$$\frac{2^{21}\cdot 2-\frac{1}{4}}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=4\ 194\ 303 \text{ kopecks } \frac{3}{4},$$

soit environ 42 000 roubles. A ces conditions on peut bien donner gratuitement un cheval, à titre de supplément.

La pension d'un soldat

Problème

Dans un autre vieux manuel de mathématiques russe, qui porte ce long titre *Cours complet de mathématiques pures composé par Efim Voïtiakhovski, officier d'artillerie et professeur privé de mathématiques, pour le bien de la jeunesse et*

de ceux qui s'exercent dans les mathématiques (1795), on trouve le problème suivant :

« Un soldat a reçu comme dédommagement 1 kopeck pour sa première blessure, 2 kopecks pour la deuxième, 4 kopecks pour la troisième, etc. En tout il a reçu 655 roubles 35 kopecks. Trouvez le nombre de ses blessures. »

Solution

Formons l'équation

$$65\,535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{x-1}$$

ou

$$65\,535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1,$$

d'où on tire :

$$65\,536 = 2^x \quad \text{et} \quad x = 16,$$

résultat qu'il est facile de vérifier.

Le soldat devait donc être blessé 16 fois, et rester vivant, pour obtenir un dédommagement de 655 roubles 35 kopecks.

CHAPITRE IX

LA SEPTIÈME OPÉRATION MATHÉMATIQUE

Nous avons déjà dit que pour la cinquième opération, l'élévation à une puissance, il existe deux opérations inverses. Si

$$a^b = c$$

la recherche de a est l'une de ces opérations : l'extraction de la racine. L'autre opération, la recherche de b, est le calcul du logarithme. Nous supposons connus du lecteur les éléments de la théorie des logarithmes, et que, par exemple, il trouvera sans difficulté à quoi est égale l'expression

$$a^{\log_a b}.$$

On voit aisément, en effet, que si on élève la base a des logarithmes à une puissance égale au logarithme (à base a) de b, on obtient le nombre b lui-même.

Dans quel but a-t-on inventé les logarithmes ? Evidemment pour accélérer et simplifier le calcul. Voilà ce qu'en dit Neper, l'inventeur des premières tables des logarithmes :

« J'ai cherché autant que je l'ai pu à me débarrasser de la difficulté et de l'ennui du calcul, qui souvent repoussent de l'étude des mathématiques. »

En effet, les logarithmes accélèrent considérablement les calculs et permettent d'effectuer

des opérations extrêmement compliquées, telles que l'extraction de racines $n^{\text{ièmes}}$ (n quelconque).

C'est avec raison que Laplace a écrit : « L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes. » Le grand mathématicien avait en vue les astronomes parce qu'ils sont obligés de faire des calculs très compliqués et fastidieux. Mais ses paroles sont pleinement valables pour tous ceux qui s'occupent de calcul numérique en général.

Nous qui sommes habitués à nous servir des logarithmes, nous pouvons difficilement nous représenter l'étonnement et l'admiration que ceux-ci ont provoqué lors de leur apparition. Briggs, contemporain de Neper, qui s'est rendu ensuite célèbre par l'invention des logarithmes à base 10, écrivait après avoir reçu l'ouvrage de Neper : « Avec ses nouveaux et étonnants logarithmes, Neper m'a obligé à travailler activement, tant de la tête que des bras. J'espère le voir cet été, car il n'y a pas de livre qui m'ait apporté plus de plaisir et d'étonnement. » Briggs est effectivement parti pour l'Ecosse rendre visite à l'inventeur des logarithmes. Lors de leur rencontre Briggs a dit :

« J'ai entrepris ce long voyage avec le but unique de vous voir et d'apprendre à l'aide de quel instrument d'esprit et d'art vous étiez amené à la première idée sur les logarithmes qui forment un remarquable aide à l'astronomie. D'ailleurs aujourd'hui je m'étonne davantage au fait que personne ne les a trouvés auparavant— tellement ils me semblent simples, maintenant lorsque je les connais.»

Les concurrents des logarithmes

Avant l'invention des logarithmes, le besoin d'accélérer les calculs avait donné naissance à des tables d'un autre genre, à l'aide desquelles la multiplication est remplacée non par l'addition mais par la soustraction. Ces tables étaient fondées sur l'identité

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

qu'il est facile de vérifier.

Les quarts des carrés étant connus, on peut trouver le produit de deux nombres sans faire la multiplication. Les mêmes tables facilitent l'élévation au carré et l'extraction de la racine carrée. Combinées avec une table des nombres inverses elles simplifient également la division. Leur avantage sur les tables de logarithmes est qu'elles donnent des résultats *exacts*, et non pas seulement approchés. Par contre, elles le cèdent aux tables de logarithmes dans de nombreux cas beaucoup plus importants au point de vue pratique. Tandis que les tables des quarts des carrés ne permettent de multiplier que *deux* nombres, les logarithmes donnent la possibilité de trouver *d'un seul coup* le produit d'un nombre de facteurs quelconque, ainsi que de calculer une puissance *quelconque* ou d'extraire une racine d'ordre *quelconque*, entier ou fractionnaire. Il est impossible, par exemple, de calculer les taux d'intérêts composés à l'aide des tables des quarts de carrés.

On a cependant continué à éditer ces tables après la parution des diverses tables de logarithmes. En 1856 en France, on en a édité une sous le titre : *Table des carrés des nombres de 1 à*

1 000 millions, à l'aide de laquelle on trouve le produit exact des nombres par une méthode très simple, et plus commode que les logarithmes, composée par Alexandre Cossart.

Cette idée vient encore à beaucoup de gens qui ignorent qu'elle existe depuis longtemps. Deux fois des inventeurs sont venus me proposer des tables de ce genre, et ils furent très étonnés d'apprendre que leur invention datait de plus de trois siècles.

Les logarithmes ont un autre rival plus jeune : les tables de calcul que l'on trouve dans de nombreux aide-mémoire. Ces tables contiennent les carrés, les cubes, les racines carrées, les racines cubiques et les inverses des nombres, les longueurs des circonférences et les surfaces des cercles pour les nombres de 2 à 1 000. Pour de nombreux calculs techniques, ces tables sont très commodes. Mais elles ne sont pas toujours suffisantes ; le domaine d'emploi des tables de logarithmes est beaucoup plus large.

L'évolution des tables de logarithmes

On se servait encore récemment dans nos écoles des tables de logarithmes à 5 décimales. Maintenant on utilise des tables à 4 décimales, parce qu'elles sont tout à fait suffisantes pour le calcul technique. Pour la plupart des besoins pratiques, on peut même se servir des tables à 3 décimales, la précision des mesures courantes dépassant rarement le 1/1 000.

L'idée que des mantisses plus courtes sont tout à fait suffisantes a été comprise il y a relativement peu de temps. Je me rapelle encore le temps où dans les écoles de Russie on se servait de gros volumes de tables de logarithmes à 7 dé-

cimales qui ont cédé la place aux tables à 5 décimales après une lutte acharnée. Mais même les logarithmes à 7 décimales, à leur parution en 1794, semblaient une nouveauté inadmissible. La mantisse des premiers logarithmes à base 10 créés par Henry Briggs en 1624 comprenait 14 chiffres. Quelques années plus tard, ils ont été remplacés par les tables à 10 décimales établies par le mathématicien hollandais Adrian Vlacq.

Cette évolution vers des mantisses plus courtes n'est pas encore terminée à l'heure actuelle, car même maintenant nombreux sont ceux qui ne comprennent pas l'idée, pourtant simple, que la précision des calculs ne peut pas dépasser celle des mesures.

Le raccourcissement des mantisses a deux conséquences pratiques importantes : 1° une diminution notable du volume des tables ; 2° la simplification de l'usage des tables, et par suite, l'accélération des calculs qu'elles permettent d'effectuer. Les tables à 7 décimales occupent environ 200 pages de grand format, celles à 5 décimales 30 pages de format deux fois moindre, celles à 4 décimales un volume 10 fois plus réduit, soit 2 pages de grand format, enfin, une page suffit pour les tables à 3 décimales. En ce qui concerne la vitesse du calcul, on a trouvé que le même calcul effectué à l'aide d'une table à 5 décimales demandait trois fois moins de temps qu'avec une table à 7 décimales.

Curiosités logarithmiques

Si dans la vie pratique et dans la technique les tables à 3 ou à 4 décimales suffisent, le théoricien peut disposer de tables avec un nombre de chiffres beaucoup plus grand que les loga-

rithmes de Briggs qui en contenaient 14. Dans la plupart des cas, le logarithme est un nombre irrationnel et ne peut être exprimé exactement par un nombre de chiffres limité ; les logarithmes de la plupart des nombres ne sont exprimés que de façon approximative, et sont d'autant plus exacts qu'il y a plus de chiffres dans leur mantisse. Pour les travaux scientifiques, les logarithmes à 14 décimales sont parfois insuffisants * ; mais parmi les 500 modèles de tables parues à ce jour, le chercheur en trouvera toujours une qui le satisfera. Citons par exemple les logarithmes à 20 décimales des nombres de 2 à 1 200, édités en France par Callet (1795). Il existe des tables de logarithmes avec un nombre énorme de décimales, de véritables curiosités logarithmiques, dont l'existence, comme j'ai pu le constater, n'est pas même soupçonnée par de nombreux mathématiciens.

Voici ces logarithmes géants (ils ne sont pas décimaux, mais naturels **) :

Tables de Wolfram à 48 décimales ;

Tables de Sharp à 61 décimales ;

Tables de Parkhurst à 102 décimales ;

et enfin les logarithmes d'Adams à 260 décimales.

Dans le dernier cas, nous avons d'ailleurs non pas une table, mais les logarithmes naturels de cinq nombres : 2, 3, 5, 7 et 10, et un facteur (à 260 chiffres) pour leur transformation en logarithmes vulgaires. Il est clair cependant que, connaissant les logarithmes de ces cinq nombres,

---

* Les logarithmes de Briggs n'existent que pour les nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 101 000.

** On appelle logarithmes naturels ceux qui ont pour base le nombre 2,718... dont nous parlerons plus loin.

on peut par simple addition ou multiplication obtenir les logarithmes d'une multitude de nombres non premiers ; par exemple, le logarithme de 12 est égal à la somme des logarithmes de 2, 2 et 3, etc.

Aux curiosités logarithmiques, on pourrait ajouter la règle à calcul, si cet instrument ingénieux n'était grâce à la commodité de son emploi, devenu aussi courant chez les techniciens que le boulier chez les comptables. L'habitude fait disparaître l'étonnement devant cet instrument qui, basé sur le principe de logarithmes, ne demande même pas à ceux qui s'en servent de savoir ce qu'est un logarithme.

Les logarithmes sur la scène

Le tour le plus étonnant que les calculateurs professionnels font devant le public est sans doute le suivant. Prévenu par les affiches qu'un calculateur extraira mentalement n'importe quelle racine de n'importe quel nombre, vous calculez longuement chez vous la 31e puissance d'un nombre, avec l'intention de mettre le calculateur dans l'embarras avec un nombre de 35 chiffres. Le moment venu, vous vous adressez au calculateur en ces termes :

« Essayez d'extraire la racine 31e du nombre suivant qui comprend 35 chiffres. Ecrivez, je vais dicter. »

Le calculateur prend la craie, et avant même que vous n'ayez ouvert la bouche pour énoncer le premier chiffre, il a déjà écrit la réponse : 13.

Ne connaissant pas le nombre, il en a extrait mentalement la racine 31e, avec une vitesse inouïe !..

Vous êtes stupéfait, et pourtant il n'y a là rien de surnaturel. Le secret consiste simplement en ceci qu'il n'existe qu'un *seul* nombre, en l'occurrence 13, dont la 31e puissance soit un nombre de 35 chiffres. Les nombres inférieurs à 13 donnent moins de 35 chiffres et les nombres supérieurs à 13 en donnent plus.

Mais d'où le calculateur savait-il cela ? Comment a-t-il trouvé ce nombre 13 ? Il a été aidé par les logarithmes à 2 décimales qu'il sait par cœur pour les 15 à 20 premiers nombres. Cela n'est guère difficile, surtout lorsqu'on sait que le logarithme d'un nombre non premier est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs premiers. Connaissant les logarithmes de 2, 3 et 7* on peut déjà trouver immédiatement les logarithmes des nombres de la première dizaine ; pour la deuxième dizaine il faut encore retenir les logarithmes de quatre nombres.

De toute façon le calculateur connaît par cœur le tableau suivant :

Nombre	Log	Nombre	Log
2	0,30	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,60	13	1,11
5	0,70	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,20
8	0,90	17	1,23
9	0,95	18	1,26
		19	1,28

* Rappelons au lecteur que $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$.

Le tour de force qui vous a tellement étonné consistait en ceci :

$$\log \sqrt[31]{(35 \text{ chiffres})} = \frac{34,\ldots}{31}.$$

Le logarithme cherché est donc compris entre

$$\frac{34}{31} \text{ et } \frac{34,99}{31}, \text{ soit entre}$$
$$1,09 \text{ et } 1,13.$$

Dans cet intervalle il n'y a le logarithme que d'un seul nombre entier : c'est 1,11, le logarithme de 13. Voilà comment a été trouvé le résultat. Evidemment, pour faire mentalement et rapidement toutes ces opérations, il faut posséder l'habileté d'un calculateur professionnel, mais comme vous le voyez, la chose est en fait assez simple. Maintenant, vous pourrez vous-mêmes réussir des exploits de ce genre, sinon mentalement, du moins sur le papier.

Admettons qu'on vous ait proposé le problème suivant : extraire la racine 64e d'un nombre de 20 chiffres.

Sans demander ce nombre, vous pouvez directement dire le résultat : cette racine est égale à 2.

En effet, $\log \sqrt[64]{(20 \text{ chiffres})} = \frac{19,\ldots}{64}$; il doit se trouver entre $\frac{19}{64}$ et $\frac{19,99}{64}$, c'est-à-dire entre 0,29 et 0,32. Il n'y a dans cet intervalle qu'un seul logarithme de nombre entier : 0,30..., c'est-à-dire le logarithme de 2.

Vous pouvez maintenant étonner définitivement celui qui vous a proposé ce problème, en lui disant le nombre qu'il avait voulu vous dicter : c'est, à une unité près, le célèbre nombre du jeu d'échecs

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Les logarithmes à la ferme

Problème

La quantité de fourrage dit de maintien (c'est-à-dire la quantité minimum qui ne fait que couvrir les dépenses de l'organisme pour l'émission de chaleur, pour le travail des organes internes, le remplacement des cellules mortes, etc.) * est proportionnelle à la surface extérieure du corps de l'animal. Connaissant cela, déterminez le nombre de calories fournies par le fourrage de maintien destiné à un bœuf de 420 kg, si dans les mêmes conditions un bœuf de 630 kg a besoin de 13 500 calories.

Solution

Pour résoudre ce problème d'élevage pratique, il faudra recourir, en plus de l'algèbre, à la géométrie. Selon l'énoncé, le nombre x de calories cherché est proportionnel à la surface (S) du bœuf, c'est-à-dire :

$$\frac{x}{13\,500}=\frac{S}{S_1},$$

où S_1 est la surface du corps du bœuf qui pèse 630 kg. Nous savons, d'après la géométrie, que les surfaces (S) de corps semblables sont entre elles comme les carrés de leurs dimensions linéaires (l), et les volumes (et par suite les poids), comme les cubes des dimensions linéaires. Par

* A la différence du fourrage « productif », c'est-à-dire de la partie du fourrage qui sert à la production pour laquelle l'animal est élevé.

conséquent :

$$\frac{S}{S_1}=\frac{l^2}{l_1^2}, \quad \frac{420}{630}=\frac{l^3}{l_1^3} \quad \text{et par suite}$$

$$\frac{l}{l_1}=\frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

d'où :

$$\frac{x}{13\,500}=\frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}}=\sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2},$$

$$x=13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

A l'aide d'une table de logarithmes on trouve :

$$x=10\,300.$$

Le bœuf a besoin de 10 300 calories.

Les logarithmes dans la musique

Les musiciens s'intéressent rarement aux mathématiques. Tout en estimant cette science, ils préfèrent souvent se tenir loin d'elle. Pourtant, les musiciens, même ceux qui ne vérifient pas, comme Salieri chez Pouchkine, « l'harmonie par l'algèbre », ont affaire aux mathématiques beaucoup plus souvent qu'ils ne le pensent, et même à une chose aussi terrible que les logarithmes.

Je me permettrai de citer un extrait d'un article du professeur de physique A. Eichenwald*.

« Un de mes camarades de lycée aimait à jouer du piano, mais n'aimait pas les mathé-

* Cet article, sous le titre «Sur les grandes et les petites distances», a paru dans le *Calendrier Astronomique russe pour l'année 1919.*

matiques. Il disait même avec un certain mépris que la musique et les mathématiques n'avaient rien de commun. « Il est vrai, ajoutait-il, que Pythagore a trouvé certaines relations entre les vibrations sonores, mais justement cette gamme pythagoricienne ne convient pas à notre musique. »

Imaginez l'étonnement de mon camarade quand je lui eus démontré qu'en jouant sur les touches d'un piano, il jouait à vrai dire sur des logarithmes... En effet, les « échelons » de la gamme chromatique ne sont pas à égales distances ni par rapport aux fréquences, ni par rapport aux longueurs d'ondes des sons correspondants, mais se présentent comme les logarithmes de ces grandeurs. La seule différence est que la base de ces logarithmes est 2 et non 10.

Admettons que la note *do* de l'octave la plus basse est déterminée par n oscillations par seconde. Dans ce cas le *do* de la première octave fera $2n$ oscillations par seconde et le *do* de la m^{ième} octave fera $n \cdot 2^m$ oscillations, etc. Désignons tous les tons de la gamme chromatique du piano par les numéros p, en prenant pour zéro le *do* de chaque octave ; alors le ton *sol* sera le 7e, *la* sera le 9e, etc., le 12e ton sera de nouveau *do*, mais d'une octave plus haute. Puisque dans la gamme chromatique chaque note consécutive a un nombre d'oscillations $\sqrt[12]{2}$ fois plus grand que la note précédente, le nombre d'oscillations d'une note quelconque peut être exprimé par la formule

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p .$$

En cherchant le logarithme de cette formule on obtient :

$$\log N_{pm} = \log n + m \log 2 + p \frac{\log 2}{12}$$

ou

$$\log N_{pm} = \log n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \log 2.$$

En prenant le nombre d'oscillations du *do* inférieur pour unité ($n=1$) et ramenant tous les logarithmes à une base égal à 2 (ou simplement en prenant logarithme de 2=1) on a :

$$\log N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

On voit que les numéros des touches d'un piano sont les logarithmes des nombres d'oscillations des sons correspondants *. Nous pouvons même dire que le numéro de l'octave est la *caractéristique*, et le numéro du son dans l'octave donnée ** est la *mantisse* de ce logarithme. »

Ajoutons que dans le *sol* de la troisième octave, c'est-à-dire dans le nombre $3+\frac{7}{12}(\approx 3,583)$, le nombre 3 est la caractéristique du logarithme du nombre d'oscillations de cette note, et $\frac{7}{12}$ ($\approx 0,583$) est la mantisse du même logarithme à base 2. Par suite, le nombre d'oscillations est $2^{3,583}$, soit 11,98 fois supérieur au nombre d'oscillations du *do* de la première octave.

Les étoiles, le bruit et les logarithmes

Ce titre, qui réunit des choses apparemment aussi disparates, n'est pas une parodie des œuvres de Kouzma Proutkov *** ; le fait est que les

---

* multipliés par 12.

** divisé par 12.

*** Kouzma Proutkov, auteur imaginaire des aphorismes spirituels composés par les écrivains russes du XIXe siècle, A. Tolstoï et les frères Jemtchoujnikov.

étoiles et le bruit sont intimement liés aux logarithmes.

Le bruit et les étoiles sont réunis ici parce que l'intensité du bruit et la brillance des étoiles sont évaluées de la même façon, suivant une échelle logarithmique.

Selon les degrés de leur brillance visible, les astronomes répartissent les étoiles en étoiles de première magnitude, de deuxième, de troisième, etc. Les magnitudes consécutives sont perçues par l'œil comme les termes d'une progression arithmétique. Mais leur brillance physique varie d'après une autre loi. Les brillances réelles forment une progression géométrique de raison 2,5. Il est facile de comprendre que la « magnitude » d'une étoile n'est autre que le logarithme de sa brillance physique. Par exemple, une étoile de première magnitude est $2{,}5^{3-1}$, soit 6,25 fois plus brillante qu'une étoile de troisième magnitude. Autrement dit, en évaluant la brillance visible des étoiles, l'astronome opère avec une table de logarithmes à base 2,5. Je ne m'attarderai pas sur ce sujet, que j'ai traité en détails dans mon livre *L'astronomie récréative.*

De façon analogue on évalue l'intensité du bruit. L'influence nuisible du bruit d'origine industrielle sur la santé des ouvriers et sur la productivité du travail a poussé à élaborer des méthodes d'évaluation numérique exacte de l'intensité du bruit. L'unité d'intensité du bruit est le bel, et on utilise dans la pratique sa dixième partie, le décibel. Les degrés consécutifs de bruit, 1 bel, 2 bels, etc. (en pratique 10 décibels, 20 décibels, etc.) forment pour notre oreille une progression arithmétique. La « force » physique (plus exactement l'énergie) de ces bruits constitue une progression géométrique de raison 10.

A une différence d'intensité de 1 bel correspond une différence de force égale à 10. Cela signifie que l'intensité du bruit exprimée en bels est égale au logarithme à base 10 de sa force physique.

Pour plus de clarté, prenons quelques exemples.

Le faible bruissement des feuillages est évalué à 1 bel, une conversation à haute voix à 6,5 bels, le rugissement d'un lion à 8,7 bels. Il s'ensuit que pour la force du son, la parole dépasse le bruissement des feuilles de

$$10^{6,5-1}=10^{5,5}=316\,000 \text{ fois;}$$

le rugissement d'un lion est

$$10^{8,7-6,5}=10^{2,2}=158 \text{ fois}$$

plus fort que la parole.

Un bruit dont l'intensité dépasse 8 bels est considéré comme nuisible à l'homme. Dans de nombreuses usines ce chiffre est dépassé : on y trouve des bruits de 10 bels et même davantage ; le choc d'un marteau contre une plaque d'acier provoque un bruit de 11 bels. Ces bruits sont de 100 à 1 000 fois supérieurs à la limite admissible, et de 10 à 100 fois supérieurs à celui des chutes du Niagara (9 bels).

Ce n'est pas un hasard si, lorsqu'on évalue la brillance des étoiles et l'intensité du bruit, nous avons affaire à un rapport logarithmique entre la valeur de la sensation et celle de l'excitation qui la provoque. L'un et l'autre sont les conséquences d'une loi générale (appelée « loi psychophysique de Fechner ») selon laquelle la valeur d'une sensation est proportionnelle au logarithme de la valeur de l'excitation.

Les logarithmes dans l'éclairage électrique

Problème

Avec le même filament, les ampoules électriques à gaz donnent un éclairage beaucoup plus intense que les ampoules à vide, parce que la température du filament est différente dans les deux cas. Selon une règle de physique, la quantité totale de lumière émise par un corps chauffé à blanc croît proportionnellement à la douzième puissance de sa température absolue (° K). Sachant cela, calculons de combien de fois une lampe à gaz, dont la température du filament est de 2 500° K (c'est-à-dire en comptant à partir de —273° C), émet plus de lumière qu'une lampe à vide, dont le filament est chauffé à 2200° K.

Solution

En désignant par x le rapport cherché, on a l'équation

$$x = \left(\frac{2500}{2200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

d'où

$$\log x = 12 (\log 25 - \log 22)\ ; \qquad x = 4{,}6.$$

Une ampoule à gaz émet donc 4,6 fois plus de lumière qu'une ampoule à vide. Il s'ensuit que si une ampoule à vide fournit 50 bougies, la même ampoule remplie de gaz en fournira 230.

Faisons encore un calcul : quel doit être (en %) l'accroissement de la température absolue nécessaire pour *doubler* l'éclat d'une ampoule ?

Solution

Posons l'équation :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2,$$

d'où

$$\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{\log 2}{12} \text{ et } x=6\%.$$

Enfin le troisième calcul : de combien (en %) augmentera l'éclat d'une ampoule si on élève de 1 % la température absolue de son filament ?

Solution

En calculant à l'aide des logarithmes

$$x=1{,}01^{12}$$

on trouve

$$x=1{,}13.$$

L'éclat augmentera de 13%.

Pour une élévation de température de 2% on trouve de même un accroissement de l'éclat de 27%, et pour une élévation de température de 3% une augmentation de l'éclat de 43%.

On comprend donc pourquoi dans l'industrie des ampoules électriques, on cherche à accroître la température du filament, puisque chaque degré supplémentaire y a une grande importance.

Testament pour des centaines d'années

Tout le monde a entendu parler du fameux nombre de grains de blé que l'inventeur du jeu d'échecs aurait demandé comme récompense. Ce nombre a été composé par doublement successif de l'unité : pour la première case de l'échiquier l'inventeur a demandé un grain, pour la deuxième deux, etc. en doublant toujours jusqu'à la 64e case.

Les nombres augmentent très rapidement même avec un système d'accroissement plus

réduit. Un capital qui rapporte 5% augmente annuellement de 1,05 fois. Ce n'est pas là, semble-t-il, un accroissement bien considérable. Pourtant, après une période de temps assez longue, le capital se transforme en une somme énorme. Cela explique l'augmentation extraordinaire des capitaux légués par testament à très longue échéance. On peut s'étonner qu'un testateur laissant une somme assez modeste puisse donner des ordres pour le paiement de capitaux énormes. On connaît cependant le testament de Franklin, publié dans le *Recueil des différents ouvrages de Benjamin Franklin*. En voici un extrait :

« Je laisse 1 000 livres sterling aux habitants de Boston. Et s'ils acceptent ces 1 000 livres ils devront les confier aux citoyens d'élite. Ceux-ci donneront cet argent à un taux d'intérêt de 5% aux jeunes artisans *. Dans 100 ans cette somme deviendra égale à 131 000 livres sterling. Je veux que 100 000 livres soient utilisées à ce moment pour la construction de bâtiments publics et que les 31 000 livres qui restent soient prêtées au même taux d'intérêt pour 100 ans. A la fin du deuxième siècle, cette somme deviendra égale à 4 061 000 livres sterling dont 1 060 000 livres seront mises à la disposition des habitants de Boston et 3 millions à la Commune de Massachusetts. Je n'ose pas faire de plans pour une période plus longue. »

En laissant en tout et pour tout 1 000 livres, Franklin distribue des millions. Il n'y a là rien d'étonnant, et le calcul montre que les raisonnements du testateur étaient justes. En augmentant annuellement de 1,05 fois, 1 000 livres se

* A cette époque il n'y avait pas d'établissements de crédit aux Etats-Unis.

transforment au bout de 100 ans en :

$$x = 1000 \cdot 1{,}05^{100} \text{ livres.}$$

On peut calculer cette expression à l'aide des logarithmes :

$$\log x = \log 1000 + 100 \log 1{,}05 = 5{,}11893,$$

d'où

$$x = 131\,000,$$

conformément au testament. Au cours du siècle suivant, les 31 000 livres se transforment en

$$y = 31\,000 \cdot 1{,}05^{100},$$

d'où on tire à l'aide de logarithmes :

$$y = 4\,076\,500 \text{ livres,}$$

somme qui ne diffère pas beaucoup de celle indiquée dans le testament.

Je laisse au lecteur le soin de résoudre le problème suivant tiré du roman *Les Golovlev* de Saltykov-Chtchédrine :

« Porfiri Vladimirovitch est dans son cabinet de travail et couvre de chiffres des feuilles de papier. Cette fois, il est préoccupé par ce problème : combien j'aurais maintenant d'argent si maman, au lieu de prendre les 100 roubles dont grand-père lui avait fait cadeau pour son anniversaire, les avait placés dans une banque au nom du petit Porfiri. Il en résulte tout de même que la somme aurait été modeste : 800 roubles. »

En supposant que Porfiri était alors âgé de 50 ans et en admettant qu'il ait fait un calcul exact (ce qui est peu probable car Golovlev ne connaissait ni les logarithmes ni les intérêts composés) il s'agit de trouver le taux d'intérêt que payait à ce moment-là l'établissement de crédit.

Accroissement continu d'un capital

Dans les caisses d'épargne les intérêts sont ajoutés au capital initial chaque année. Si on les ajoute plus souvent, le capital croît plus rapidement puisqu'une plus grande somme participe alors à la formation des intérêts. Prenons un exemple théorique très simple : dans une caisse d'épargne, on a placé 100 roubles au taux de 100%. Si les intérêts sont ajoutés au capital initial seulement au bout d'un an, la somme de 100 roubles sera portée à 200 roubles. Voyons maintenant quelle somme on aura si les intérêts sont ajoutés au capital initial tous les 6 mois. Après 6 mois, les 100 roubles deviendront

$$100 \cdot 1{,}5 = 150 \text{ roubles.}$$

Au bout des 6 mois suivants on aura :

$$150 \cdot 1{,}5 = 225 \text{ roubles.}$$

Si l'on ajoute les intérêts chaque $\frac{1}{3}$ année, après un an les 100 roubles deviendront

$$100 \cdot \left(1 \frac{1}{3}\right)^3 \approx 237 \text{ roubles } 03 \text{ kopecks.}$$

Réduisons les délais après lesquels on ajoute les intérêts au capital initial jusqu'à 0,1 année, 0,01 année, 0,001 année, etc. On aura alors au bout d'un an :

$$100 \text{ roubles} \cdot 1{,}1^{10} \approx 259 \text{ r. } 37 \text{ k.}$$
$$100 \text{ roubles} \cdot 1{,}01^{100} \approx 270 \text{ r. } 48 \text{ k.}$$
$$100 \text{ roubles} \cdot 1{,}001^{1000} \approx 271 \text{ r. } 69 \text{ k.}$$

On démontre en mathématiques supérieures que si les délais deviennent infiniment petits, le capital total ne croît pas de façon infinie, mais

tend vers une limite, approximativement égale * à 271 roubles 83 kopecks. Le capital placé à un taux de 100% ne peut pas augmenter plus de 2,7183 fois, même si l'on ajoute les intérêts au capital chaque seconde.

Le nombre *e*

Le nombre 2,718... que nous venons d'obtenir, et qui joue en mathématiques supérieures un rôle aussi important que le célèbre nombre π, est désigné par la lettre e. C'est un nombre irrationnel : il ne peut pas être exprimé exactement par un nombre fini de chiffres **, mais on le calcule approximativement, avec une précision aussi grande que l'on veut, à l'aide de la série suivante :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

L'exemple des intérêts composés cité plus haut montre que le nombre e est la limite de l'expression

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

lorsque n tend vers l'infini.

Pour de nombreuses raisons que nous ne pouvons exposer ici, il est rationnel d'adopter le nombre e comme base d'un système de logarithmes. De telles tables (« logarithmes naturels ») existent et trouvent un large emploi dans la science et dans la technique. Les logarithmes géants à 48, 61, 102 et 260 décimales dont nous avons parlé ont pour base ce nombre e.

---

* Nous avons rejeté les fractions de kopecks.

** En outre, e, comme le nombre π, est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être obtenu par la solution d'une équation algébrique à coefficients entiers.

Le nombre e apparaît parfois là où on s'y attend le moins. Posons, par exemple, le problème suivant.

En quelles parties faut-il diviser un nombre a donné pour que le produit de ces parties soit maximum ?

Nous savons déjà que les nombres donnent un produit maximum, leur somme étant constante, lorsqu'ils sont égaux. Il est donc clair qu'il faut diviser a en parties égales. Mais combien de parties : 2, 3 ou 10 ? Les mathématiques supérieures permettent d'établir que le produit est maximum quand les parties sont aussi proches que possible du nombre e.

Par exemple, il faut diviser 10 en un nombre de parties égales telles que chacune d'elles soit aussi proche que possible de 2,718... Pour cela il faut trouver le quotient de

$$\frac{10}{2{,}718\ldots}=3{,}678\ldots$$

Puisqu'on ne peut pas diviser un nombre en 3,678... parties égales, on est obligé de prendre comme diviseur le nombre entier le plus proche, soit 4. Nous obtenons ainsi le produit maximum des tranches de 10 si ces parties sont égales à $\frac{10}{4}$, c'est-à-dire à 2,5.

Il s'ensuit que $(2{,}5)^4=39{,}0625$ est le plus grand nombre qu'on puisse obtenir en multipliant entre elles les parties égales du nombre 10. Effectivement, si on partage 10 en 3 ou en 5 parties égales, nous obtenons des produits inférieurs :

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3=37,$$

$$\left(\frac{10}{5}\right)^5=32.$$

Pour obtenir le produit maximum des parties du nombre 20, il faut partager ce dernier en 7 parties égales parce que

$$20:2{,}718\ldots = 7{,}36 \approx 7.$$

Le nombre 50 doit être divisé en 18 parties et le nombre 100 en 37 parties, parce que

$$50:2{,}718\ldots = 18{,}4,$$
$$100:2{,}718\ldots = 36{,}8.$$

Le nombre e joue un rôle énorme en mathématiques, en physique, en astronomie et dans les autres sciences. Voici quelques-uns des problèmes dont l'étude mathématique exige l'emploi de ce nombre :

La formule barométrique (diminution de la pression avec l'altitude),

La formule d'Euler,

La loi de refroidissement des corps solides,

La désintégration radio-active et l'âge de la Terre,

Les oscillations d'un pendule dans l'air,

La formule de Tsiolkovski pour la vitesse d'une fusée,

Les oscillations dans un circuit radio-électrique,

La croissance des cellules.

Une astuce logarithmique

Problème

Aux plaisanteries exposées dans le chapitre V, ajoutons encore celle-ci : la « démonstration » de l'inégalité $2 > 3$. On utilise pour cela les logarithmes. On commence par poser l'inégalité $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, qui est certainement juste. Puis on

écrit :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

ce qui ne fait aucun doute. A un plus grand nombre correspond un plus grand logarithme et par suite

$$2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Après division par $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$, on a bien $2>3$. Où est l'erreur dans la démonstration ?

Solution

L'erreur consiste en ceci : en divisant par $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$, on n'a pas changé le signe de l'inégalité ($>$au lieu de$<$), ce qu'il fallait faire puisque $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ est un nombre négatif. [Si nous nous étions servis non des logarithmes décimaux, mais d'un logarithme à base inférieure à $\frac{1}{2}$, $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ aurait été positif, mais alors nous n'aurions pas eu le droit d'affirmer qu'au plus grand nombre correspondait un plus grand logarithme.]

Ecrire un nombre quelconque à l'aide de trois 2

Problème

Terminons notre livre par un casse-tête algébrique qui a amusé les participants à un congrès de physiciens à Odessa : il s'agit de représenter un nombre quelconque, entier et positif, à l'aide de trois 2 et des symboles mathématiques.

Solution

Montrons d'abord comment on peut résoudre ce problème avec un exemple particulier. Soit 3 ce nombre. La solution est alors :

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Il est facile de vérifier cette égalité. On a en effet

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}}$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \quad -\log_2 2^{-3} = 3.$$

Avec le nombre 5 la solution serait :

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

Comme on le voit, nous utilisons ici le fait qu'avec la racine carrée, il n'est pas nécessaire d'écrire l'exposant de la racine.

La solution générale du problème est la suivante : si N est le nombre donné, on a :

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N \text{ fois}},$$

le nombre de radicaux étant égal au nombre d'unités dans le nombre donné.

Table des matières